0.1 Küme Cebri

Bu bölümde verilen keyfi kümeler üzerinde birleşim, kesişim, fark, tümleyen,...gibi özellikleri sağlayan eşitliklerle ilgilenceğiz. İlk olarak De Morgan kuralları diye bilinen bir Teoremi ifade ve spat edeceğiz.

Teorem 1 *A ve B iki küme olmak üzere*
$i)$ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\qquad$ $ii)$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
sağlanır.

İspat: $i)$ İspatı iki adımda yapacağız. İlk olarak $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ olduğunu gösterelim. $x \in (A \cup B)^c$ olsun. Bu durumda $x \notin (A \cup B)$ olup $x \notin A$ ve $x \notin B$ olur. O halde $x \in A^c$ ve $x \in B^c$ yani $x \in A^c \cap B^c$ bulunur. Buradan

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c \tag{1}$$

sağlanır. Şimdi ise $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$ olduğunu gösterelim. $x \in A^c \cap B^c$ olsun. Bu durumda $x \in A^c$ ve $x \in B^c$ olup $x \notin A$ ve $x \notin B$ olur. O halde $x \notin (A \cup B)$ yani $x \in (A \cup B)^c$ bulunur. Buradan

$$A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c \tag{2}$$

sağlanır. (1) ve (2) den

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

gerçeklenir.
$ii)$ $i)$ ye benzer yolla ispat yapılır.

Teorem 2 *E evrensel küme ve A, B ve C herhangi üç küme olmak üzere aşağıdaki özellikler gerçeklenir.*

1) $A \cup B = B \cup A$
2) $A \cap B = B \cap A$
3) $A \cup \emptyset = A$
4) $A \cap E = A$
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
7) $A \cup A^c = E$
8) $A \cap A^c = \emptyset$

İspat: Sadece 2), 5) ve 7) yi ispat edip diğerlerini alıştırma olarak bırakacağız.

2) $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ ve $x \in B \Rightarrow x \in B$ ve $x \in A$ olup $x \in B \cap A$ bulunur.

5)

$$\begin{aligned}
x &\in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \\
&\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}$$

7)

$$
\begin{aligned}
x &\in A \cup A^c \Rightarrow x \in A \vee x \in A^c \Rightarrow x \in E \\
\text{yani } A \cup A^c &\subseteq E \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

Aksine

$$
\begin{aligned}
x &\in E \Rightarrow x \notin A \text{ ise } x \in A^c \text{ olup } x \in A \cup A^c \text{ olur} \\
\text{veya } x &\notin A^c \text{ise } x \in A \text{ olup } x \in A \cup A^c \text{ olur, yani} \\
E &\subseteq A \cup A^c \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla $A \cup A^c = E$ olmalıdır.

Örnek 3 $A \backslash B = A \cap B^c$ *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm 4 $x \in A \backslash B$ *olsun. Bu durumda* $x \in A \wedge x \in B^c$ *olup* $x \in A \cap B^c$ *bulunur, yani* $A \backslash B \subseteq A \cap B^c$ *elde edilir. Aksine* $x \in A \cap B^c$ *olsun. Bu durumda* $x \in A \wedge x \in B^c$ *olup* $x \in A \wedge x \notin B$ *yani* $x \in A \backslash B$ *dir. Bu ise* $A \cap B^c \subseteq A \backslash B$ *olduğunu gösterir. Sonuç olarak* $A \backslash B = A \cap B^c$ *bulunur.*

0.2 Kümeler Ailesi

İkiden çok sayıda kümeyi gözönüne aldığımızda bu kümeleri A, B, C, D,... gibi harflerle gösterebiliriz. Ancak küme sayısı artıkça bu yazış olanaksız olabilir. Böyle durumlarda kümeleri A_1, A_2, ... şekinde gösterebiliriz. Örneğin n tane küme varsa bu kümeleri A_1, A_2, ..., A_n olarak yazabiliriz.

Tanım 5 *I herhangi bir küme olsun. I kümesinin herbir elemanı için bir A_i kümesi varsa, I kümesine indis kümesi, i elemanına ise indis denir.* $\{A_i : i \in I\}$ *kümesine ise kümeler ailesi denir. Kümeler ailesi genellikle* $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ *gibi harflerle gösterilir.*

Örnek 6 $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{3, 4, a\}$, $A_3 = \{-3,\ 7,\ 3\}$ *ve* $A_4 = \left\{\frac{1}{2},\ 2,\ m,\ 3\right\}$ *kümeleri verilsin. Bu durumda* $\mathcal{A} = \{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4\}$ *bir küme ailesidir.*

Tanım 7 A_1, A_2, ..., A_n *kümeleri verilsin. Bu kümelerin birleşimi yani*

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$$

birleşim kümesi

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

ile gösterilir. Ayrıca

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : \textit{en az bir } i = 1,\ 2,\ ..., n \textit{ için } x \in A_i\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 8 *$A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ kümeleri verilsin. Bu kümelerin kesişimi yani*

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$$

kesişim kümesi

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

ile gösterilir. Ayrıca

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x : her\ i = 1,\ 2,\ ..., n\ için\ x \in A_i\}$$

ile tanımlanır.

Örnek 9 *Örnek* (6) *de verilen kümeler için* $\bigcup_{i=1}^{4} A_i$ *ve* $\bigcap_{i=1}^{4} A_i$ *kümelerini bulunuz.*

Çözüm 10 $\bigcup_{i=1}^{4} A_i = \left\{1, 2,\ 3, 4, a,\ -3,\ 7,\ \frac{1}{2},\ m\right\}$ *ve* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{3\}$ *olarak elde edilir.*

Tanım 11 $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ *ve* $\mathcal{F} = \{A_j : k \in K\}$ *olmak üzere* $\mathcal{A}$ *ve* $\mathcal{F}$ *kümeleri verilsin. Eğer* $K \subseteq I$ *ise* $\mathcal{F}$ *ailesine* $\mathcal{A}$ *ailesinin bir alt ailesi denir.*

Örnek 12 $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$, $\mathcal{F} = \{A_j : k \in K\}$ *ve* $I = \{1,\ 2,\ ..., 10\}$, $K = \{1,\ 2,\ ..., 18\}$ *olmak üzere* $\mathcal{A}$ *ailesi* $\mathcal{F}$ *nin bir alt ailesidir.*

Teorem 13 *(Genelleştirilmiş De Morgan Kuralları) E kümesinin alt kümelerinden oluşan* $\{A_i : i \in I\}$ *küme ailesini göz önüne alalım. Aşağıdaki eştlikler sağlanır.*

i) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$

ii) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$

İspat: i)

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c &\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I \text{ için } x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I \text{ için } x \in A_i^c \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i^c \end{aligned}$$

bulunur.

ii)

$$\begin{aligned} x &\in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I \text{ için } x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I \text{ için } x \in A_i^c \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i^c \end{aligned}$$

elde edilir.

0.3 Kümelerin Kartezyen Çarpımı

Bir önceki kısımda kümenin elemanların yazılış sırasının önemli olmadığından bahsetmiştik. Fakat $a,\ b$ elemanının (a,b) şeklinde yazılan ve adına sıralı ikili diyeceğimiz yeni elemanın yazılış sırası oldukça büyüktür. Bu kısımda sıralı ikili tanımı verip özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım 14 *A ve B herhangi iki küme olsun. $x \in A$ ve $y \in B$ olmak üzere (x,y) gösterimine birinci bileşeni x, ikinci bileşeni y olan sıralı ikili adı verilir.*

Tanım 15 *A ve B herhangi iki küme olsun. $x \in A$ ve $y \in B$ olmak üzere bütün (x,y) sıralı ikililerin oluşturduğu kümeye A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı denir ve $A \times B$ ile gösterilir.*

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

olarak yazılır.

Örnek 16 *$A = \{1,2,3\}\,,\ B = \{a,\ b\}$ kümeleri için*

$$A \times B = \{(1,a)\,,(2,a)\,,(3,a)\,,(1,b)\,,(2,b)\,,(3,b)\}$$

ve

$$B \times A = \{(a,1)\,,(a,2)\,,(a,3)\,,(b,1)\,,(b,2)\,,(b,3)\}$$

olur. Bu örnektende görüldüğü üzere Kartezyen çarpımın değişme özelliği yoktur.

Örnek 17 *$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ çarpım kümesi iki boyutlu düzlemi göstermektedir.*

Teorem 18 *A, B ve C kümeleri için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

3. $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

İspat: Sadece (1) eşitliğini ispatlayalım.

$$\begin{array}{rcl} (x,y) & \in & A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C \\ & \Leftrightarrow & x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \\ & \Leftrightarrow & (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\ & \Leftrightarrow & (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times C \\ & \Leftrightarrow & (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \end{array}$$

bulunur. Diğer eşitlikler benzer olarak ispatlanır.

1