

İkinci Basamaktan Denklemlerin Çözümlerinin Davranışı

Ankara Üniversitesi

İkinci basamaktan lineer sabit katsayılı homogen

$$x(n+2) + a_1x(n+1) + a_2x(n) = 0 \quad (1)$$

fark denklemini ele alalım. Burada a_1 ve a_2 katsayıları reel sabitler olmak üzere, $a_2 \neq 0$ dır. Bu denkleme ait karakteristik denklem

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (2)$$

dır.

Tanım

$x(n) > 0$ iken $x(n+1) < 0$ veya $x(n) < 0$ iken $x(n+1) > 0$ ise, $x(n)$ dizisine **sıfır etrafında salınımlıdır** denir.

(2) karakteristik denkleminin λ_1 ve λ_2 köklerine göre 3 durum meydana gelir.

Durum 1

λ_1 ve λ_2 reel ve birbirinden farklı olsun. Bu durumda (1) in iki lineer bağımsız çözümü

$$x_1(n) = \lambda_1^n \text{ ve } x_2(n) = \lambda_2^n$$

dir.

Tanım

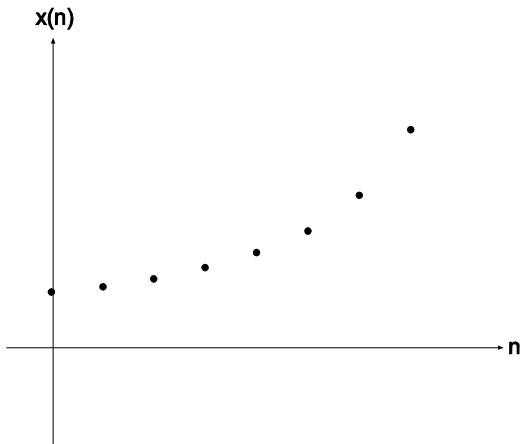
Eğer, $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ ise, $x_1(n)$ e **dominant çözüm** denir.

(1) denkleminin genel çözümü

$$x(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$$

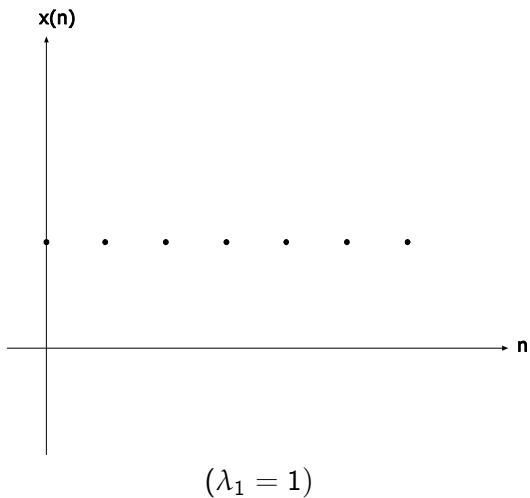
olup bu çözümün davranışı dominant çözümün davranışına bağlıdır. O halde, λ_1 değerine bağlı olarak aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar.

- $\lambda_1 > 1$ ise, $(c_1 \lambda_1^n)$ dizisi ıraksaktır. O halde çözüm kararsızdır.

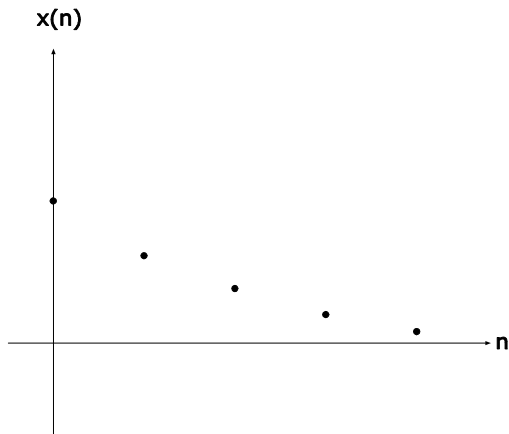


$(\lambda_1 > 1)$

- $\lambda_1 = 1$ ise, $(c_1 \lambda_1^n)$ dizisi bir sabit dizidir. O halde çözüm karardır.

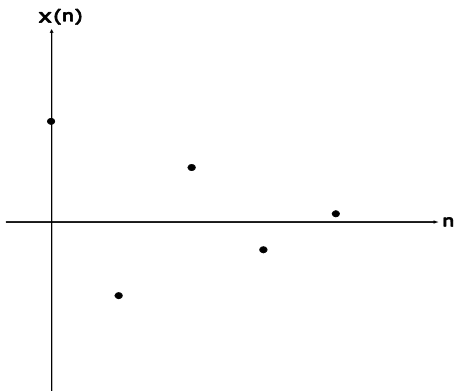


- $0 < \lambda_1 < 1$ ise, $(c_1 \lambda_1^n)$ dizisi monoton bir şekilde sifıra yakınsar. O halde çözüm asimptotik kararlıdır.



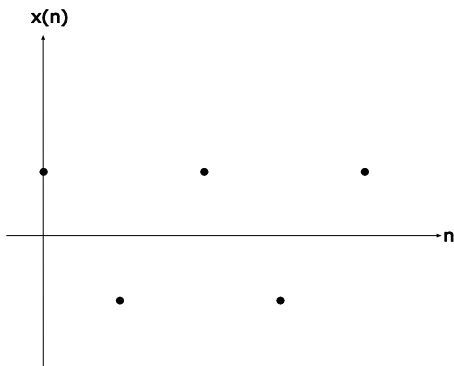
$$(0 < \lambda_1 < 1)$$

- $-1 < \lambda_1 < 0$ ise, $(c_1 \lambda_1^n)$ dizisi sıfır etrafında salınarak sıfıra yakınsar. 0 halde çözüm asimptotik kararlıdır.



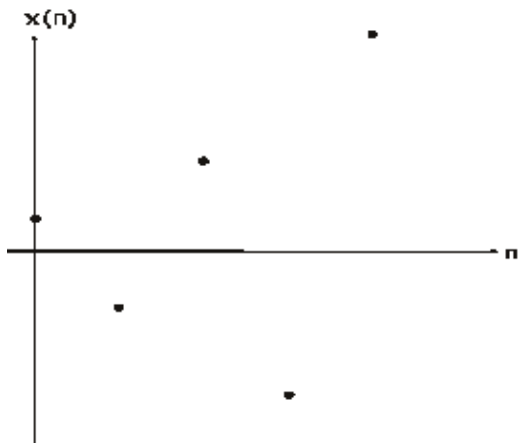
$$(-1 < \lambda_1 < 0)$$

- $\lambda_1 = -1$ ise, $(c_1 \lambda_1^n)$ dizisi c_1 ve $-c_1$ değerleri arasında salınımlıdır. O halde çözüm kararlıdır.



$$(\lambda_1 = -1)$$

- $\lambda_1 < -1$ ise, $(c_1 \lambda_1^n)$ dizisi salınımlıdır ama genlik giderek büyür. O halde sistem kararsızdır.



$$(\lambda_1 < -1)$$

Durum 2

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ reel olsun. Bu durumda (1) denkleminin genel çözümü

$$x(n) = (c_1 + c_2 n)\lambda^n$$

olup, aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar.

- $|\lambda| < 1$ için çözüm sifira yakınsaktır.
- $\lambda > 1$ için çözüm ıraksaktır.
- $\lambda = 1$ için ıraksak veya yakınsak çözümler olabilir.
- $\lambda < 0$ halinde bütün çözümler salınımlıdır.

Durum 3

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ($\beta \neq 0$) eşlenik kompleks kökler olsun. Bu durumda (1) denkleminin genel çözümü

$$x(n) = r^n(c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta), \quad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \theta = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$$

olup, genel çözüm salınımlıdır.