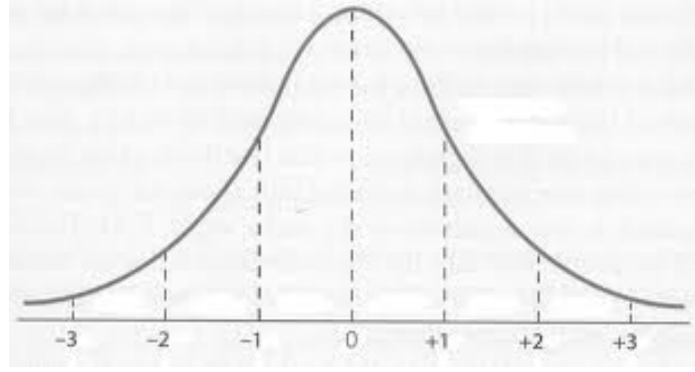


BÖLÜM 11

Z DAĞILIMI

Z dağılımı; ortalaması $\mu=0$ ve standart sapması $\sigma=1$ olan Z puanlarının evren dağılımı olarak tanımlanabilmektedir. Z dağılımı olasılıklı bir normal dağılımdır. Yani Z dağılımının genel karakteristiği normal dağılımla aynıdır. Bu nedenle Z dağılımı 'standart normal dağılım' olarak da isimlendirilmektedir.



Şekil 1. Z Dağılımı

Standart Z dağılımı olarak da bilinen Z dağılımının özellikleri şu şekildedir:

1. Simetriktir.
2. Asimptotiktir.
3. $(-\infty, +\infty)$ aralığında değerler alır.
4. Eğri altındaki toplam alanın olasılığı 1'dir. [$P(-\infty < X < +\infty) = 1$]
5. Ortalama, mod ve medyan değerleri çakışiktir. [$\mu = \text{Medyan} = \text{Mod}$]
6. Olasılık yoğunluk fonksiyonu vardır.

Z dağılım eğrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu, normal dağılım eğrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak elde edilebilmektedir. Normal dağılım eğrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma}$$

Bu fonksiyonda μ yerine 0, σ yerine 1 yazıldığında Z dağılım eğrisinin fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Normal dağılım, ortalama ve standart sapma değerlerine göre tanımlı bir evren dağılımıdır. Bu nedenle ortalama ve standart sapmaya göre sonsuz sayıda evren dağılımı belirlemek mümkündür. Z dağılımı ise standart bir dağılım olup ortalama ve standart sapma değerleri sabitlenmiştir. Bu durum Z dağılımının olasılıklı kestirimlerde kullanılmasını kolaylaştırmaktadır.

Z dağılımının bir diğer avantajı, tam sayı olarak verilen standart sapma aralıklarının yanı sıra bu tam sayılar arasındaki aralıklar için de hesaplama yapılabilmesi kolaylığıdır. Örneğin ortalaması 50, standart sapması 10 olarak belirlenen bir normal dağılım eğrisinde, 50 ile 60 arası, 70'in üzeri, 40'ın altı gibi tam sayı standart sapma aralıklarında değer alma olasılığı kolaylıkla belirlenebilir. Fakat örneğin 55 ile 75 arası, 45 üzeri, 75 aşağısı gibi tam sayı olmayan standart sapma aralıklarının olasılığının hesaplanması zordur. Bu hesaplamalar için, normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak bir integral işlemi yapılması gerekmektedir.

Z dağılımının eğrisi standart ve 'iyi' tanımlı olduğu için standart sapma açısından tam sayı aralıklarının yanı sıra tam sayı olmayan aralıkların da olasılığı daha kolay belirlenebilmektedir. Dahası bu hesaplamalar yapılarak hazırlanmış 'Standart Z Değerleri' tabloları da bulunmaktadır. Hesaplama şeklini bilmeyenler, bu tablolardan yararlanarak Z dağılımı üzerinde belli aralıkların olasılıklarını hesaplayabilir. Bu amaçla hazırlanmış bir Z değerleri tablosu, Tablo 1 olarak sona verilmiştir.

Tablo 1'de verilen Z değerleri tablosu, pozitif bir Z değeri ile 0 arasında kalan eğri altındaki alanın olasılığını göstermektedir. Olasılık değerleri 0 ile 1 arasında değişir. Bu nedenle tablodaki değerler ondalıklı sayı olarak gösterilmektedir. Tablodaki ilk sütun ve ilk satırda yer alan değerler istenen Z değerinin belirlenmesi için kullanılır. İstenen Z değerinin birler ve onda birler basamakları ilk sütundan, yüzde birler basamağı ise ilk satırdan belirlenir. Bu değerlerin kesiştiği hücredeki değer, bu Z değeri ile 0 arasındaki alanın olasılık değeridir.

Bir Z dağılımı üzerinde belli aralıklarda eğri altında kalan alanın yani belli değerlerin görülme olasılığının belirlenmesinde temelde üç işlem yapılmaktadır:

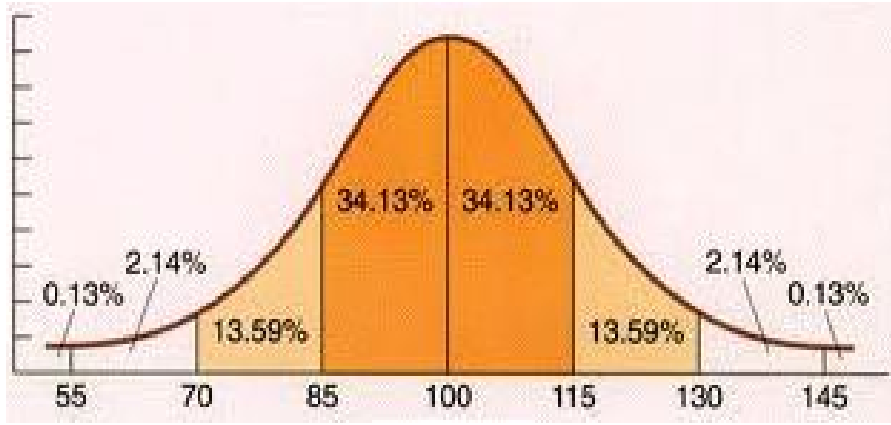
1. İstenen alanı belirleme ve dağılım üzerinde gösterme
2. Z puanlarına dönüştürme
3. Z değerleri tablosunu okuyarak istenen alanı belirleme

ÖRNEK

Bir okulda öğrencilerin zeka düzeyleri bu amaçla geliştirilmiş bir zeka testi kullanılarak ölçülmüştür. Ölçme sonuçlarına göre her bir öğrenciye bir zeka puanı verilmiştir. Zeka puanlarının ortalaması $\mu=100$ ve standart sapması $\sigma=15$ olarak hesaplanmıştır. Ayrıca zeka puanlarının normal dağılım gösterdiği belirlenmiştir. Bu bilgilere göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) Zeka puanlarının dağılımını gösteriniz.

Zeka puanları normal dağılım gösterdiği, ortalaması ve standart sapması bilindiğine göre bu puanların dağılımının şekli aşağıdaki gibi olacaktır.



b) Bu okuldaki bir öğrencinin zeka puanının 100'ün üzerinde olma olasılığı nedir?

Yukarıdaki eğride, aynı zamanda simetri eksenini olan 100 değerindeki dikey çizginin sağ tarafı ile eğri altında kalan toplam alan sorulmaktadır. Bu alan %50'lik bir kısım oluşturmaktadır. O halde bu okuldaki bir öğrencinin zeka puanının 100'ün üzerinde olma olasılığı 0,5'tir.

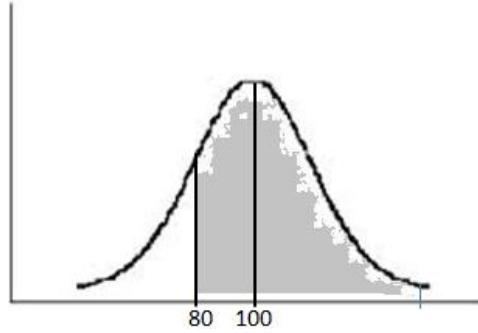
c) Bu okuldaki bir öğrencinin zeka puanının 70'in altında olma olasılığı nedir?

Yukarıdaki eğride 70 değerindeki dikey çizginin sol tarafı ile eğri altında kalan alan sorulmaktadır. BU alanın yüzde değeri $2,14 + 0,13 = 2,27$ 'dir. Yani %2,27'dir. O halde bu okuldaki bir öğrencinin zeka puanının 70'in altında olma olasılığı 0,0227'dir.

d) Bu okuldaki bir öğrencinin zeka puanının 80'in üzerinde olma olasılığı nedir?

Bu soruda 80 değerinden çizilecek olan dikey doğrunun sol tarafında eğri altında kalan toplam alanın olasılığı sorulmaktadır. Dikkat edilirse 80 değeri, tam sayı olarak belirlenen standart sapma aralıklarına denk gelmemektedir. Yani ortalama ile -1 standart sapma arasındadır. Bu durumda istenen olasılığı hesaplamak daha güçtür.

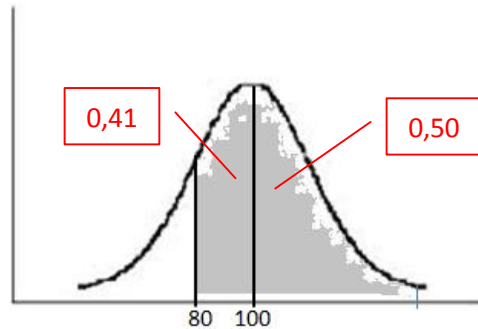
İstenen alanı hesaplamak için Z dağılımından yararlanalım. Öncelikle istenen alanı belirleyelim.



İkinci olarak istenen alanı belirlemede kullanılacak olan 80 değerini Z puanına dönüştürelim. Dikkat edilirse 100 değeri ortalama olduğu için bu değer Z puanı karşılığı 0 olacaktır.

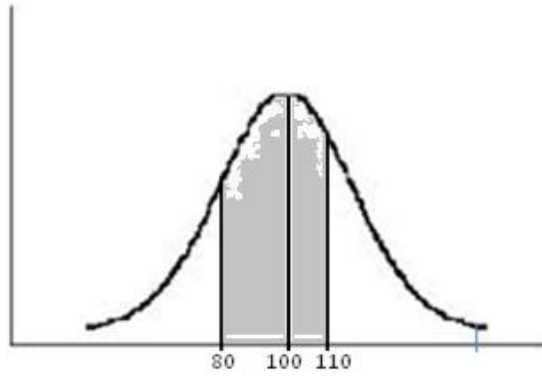
$$\begin{aligned} Z_{80} &= (80 - 100) / 15 \\ &= -20 / 15 \\ &= -1,33 \end{aligned}$$

Üçüncü olarak -1,33 ile 0 arasındaki alanın olasılığını belirleyelim. Bunun için Tablo 1'de verilen Z değerlerinden yararlanalım. Dikkat edilirse Tablo 1'deki Z değerleri, orta nokta ile pozitif bir Z değeri arasındaki alanı vermektedir. Fakat Z eğrisi simetrik olduğu için negatif değerlere yönelik alanlar, bu değerlerin pozitifleri için olan alanlarla örtüşür. Yani -1,33 ile 0 arasında kalan alan +1,33 ile 0 arasında kalan alana eşit olacaktır. O halde tabloda satırda 1,3 ve sütunda 0,03 değerlerinin kesiştiği hücreye bakılır. Bu hücredeki değer 0,4082'dir. 0'ın sağındaki alan da bilindiği üzere 0,50'dir. Buna göre toplam alanın olasılığı bu değerlerin toplamıyla yaklaşık 0,41 elde edilir.



e) Bu okuldaki bir öğrencinin zeka puanının 80 ile 110 arasında olma olasılığı nedir?

Öncelikle istenen alanı belirleyelim.



İkinci olarak 80 ve 110 puanlar için Z puanlarını belirleyelim.

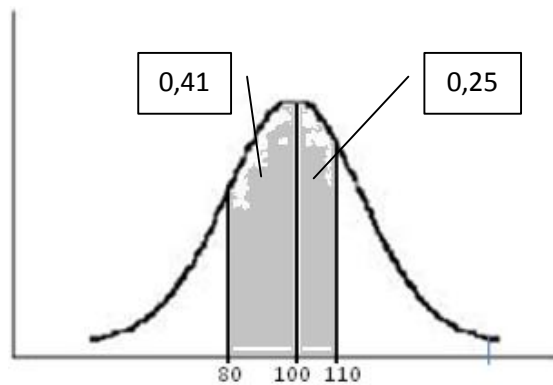
$$\begin{aligned} Z_{80} &= (80 - 100) / 15 \\ &= -20 / 15 \\ &= -1,33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{110} &= (110 - 100) / 15 \\ &= 10 / 15 \\ &= 0,67 \end{aligned}$$

Üçüncü olarak Z tablosundan bu Z değerlerine karşılık gelen değerleri okuyalım:

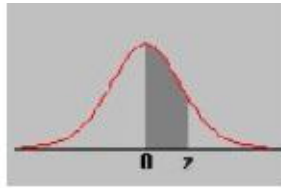
- Z=-1,33 için sütunda 1,3 ve satırda 0,03'ün kesiştiği hücredeki değer; 0,4082
- Z=0,67 için sütunda 0,6 ve sütunda 0,07'nin kesiştiği hücredeki değer; 0,2486

Son olarak bu değerleri şekil üzerinde gösterelim;



O halde toplam alanın olasılığı $0,41 + 0,25 = 0,66$ olarak elde edilir. Yani 80 ile 110 arasında puan alma olasılığı 0,66'dır.

Tablo 1. Standart Z Değerleri



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990