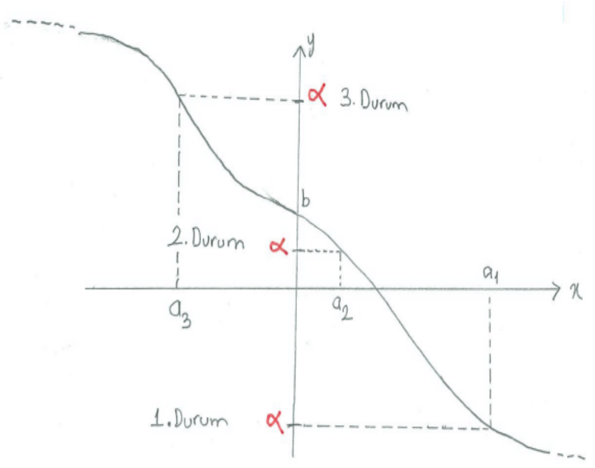
3. ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLAR

SORU 1: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ azalan fonksiyon ise f fonksiyonu Borel ölçülebilir midir?

ÇÖZÜM 1:



Şekil 2. Azalan f fonksiyonunun grafiği

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((\alpha, \infty)) := \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ olduğunu göstermeliyiz.

$\alpha < 0$ olsun. $\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) > \alpha\} = (-\infty, a_1) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$0 \leq \alpha < b$ olsun. $\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) > \alpha\} = (-\infty, a_2) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\alpha \geq b$ olsun. $\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) > \alpha\} = (-\infty, a_3) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

olup f fonksiyonu Borel ölçülebilirdir.

SORU 2: Pozitif f fonksiyonu ölçülebilir ise $\sqrt{f}$ fonksiyonu da ölçülebilirdir. Gösteriniz.

ÇÖZÜM 2: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\left\{ x \in X : \ \sqrt{f(x)} > \alpha \right\} \in \mathcal{A}$ olduğu gösterilmelidir.

$\alpha < 0$ olsun. $\left\{ x \in X : \ \sqrt{f(x)} > \alpha \right\} = X \in \mathcal{A}$

$\alpha \geq 0$ olsun. $\left\{ x \in X : \ \sqrt{f(x)} > \alpha \right\} = \{ x \in X : \ f(x) > \alpha^2 \} \in \mathcal{A}$ olup $\sqrt{f}$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

SORU 3: $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay olsun. f fonksiyonu ölçülebilir ise $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\{ x \in X : \ \ f(x) = \alpha \}$$

kümesinin ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM 3:

$$\{ x \in X : \ \ f(x) = \alpha \} = \{ x \in X : \ \ f(x) \geq \alpha \} \cap \{ x \in X : \ \ f(x) \leq \alpha \}$$

olarak yazılabilir. f fonksiyonu ölçülebilir olduğundan yukarıdaki ifadenin sağ tarafındaki iki küme ölçülebilirdir. Yani $\mathcal{A}$ $\sigma-$cebirine aittir. Dolayısıyla

$$\{ x \in X : \ \ f(x) = \alpha \} \in \mathcal{A}$$

olup ölçülebilirdir.

SORU 4: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ \ f(x)=sgnx$ ise f fonksiyonunun Borel ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM 4: $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ için $\{x\in\mathbb{R}:\ \ f(x)>\alpha\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ olduğunu göstermeliyiz.

$$f(x)=sgnx=\begin{cases}-1 & ; \quad x<0\\[2ex] 0 & ; \quad x=0\\[2ex] 1 & ; \quad x>0\end{cases}.$$

$\alpha<-1$ ise $\{x\in\mathbb{R}:\ \ f(x)>\alpha\}=\mathbb{R}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$-1\leq\alpha<0$ ise $\{x\in\mathbb{R}:\ \ f(x)>\alpha\}=[0,+\infty)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$0\leq\alpha<1$ ise $\{x\in\mathbb{R}:\ \ f(x)>\alpha\}=(0,+\infty)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\alpha>1$ ise $\{x\in\mathbb{R}:\ \ f(x)>\alpha\}=\emptyset\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

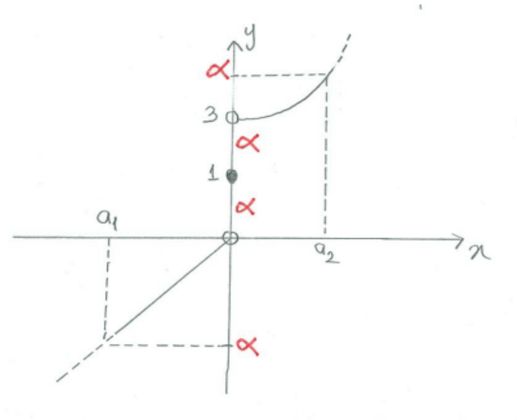
olup f fonksiyonu Borel ölçülebilirdir.

SORU 5: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x & ; \quad x<0\\[2ex] 1 & ; \quad x=0\\[2ex] x^2+3 & ; \quad x>0\end{cases}$$

ile tanımlanan f fonksiyonu Borel ölçülebilirdir. Gösteriniz.

ÇÖZÜM 5:



Şekil 3. f fonksiyonunun grafiği

$\alpha < 0$ ise $\{x \in \mathbb{R} : \quad f(x) > \alpha\} = (a_1, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$0 \leq \alpha < 1$ ise $\{x \in \mathbb{R} : \quad f(x) > \alpha\} = [0, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$1 \leq \alpha \leq 3$ ise $\{x \in \mathbb{R} : \quad f(x) > \alpha\} = (0, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\alpha > 3$ ise $\{x \in \mathbb{R} : \quad f(x) > \alpha\} = (a_2, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

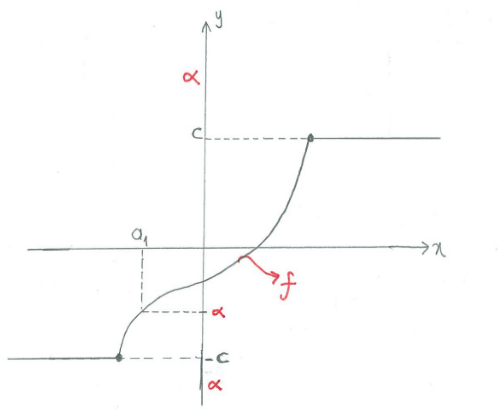
olup f fonksiyonu Borel ölçülebilirdir.

SORU 6: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon ve $c > 0$ olsun.

$$f_c(x) := \begin{cases} f(x) & ; \quad |f(x)| \leq c \\ c & ; \quad f(x) > c \\ -c & ; \quad f(x) < -c \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f_c fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM 6:



Şekil 4. f_c fonksiyonunun grafiği

$\alpha < -c$ ise $\{x \in \mathbb{R} : \quad f(x) > \alpha\} = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$-c \leq \alpha < c$ ise $\{x \in \mathbb{R} : \quad f(x) > \alpha\} = (a_1, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\alpha \geq c$ ise $\{x \in \mathbb{R} : \quad f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

olup f_c fonksiyonu Borel ölçülebilirdir.

SORU 7: $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki önermeler denktir. Gösteriniz.

(a) f, $\mathcal{A}$ $\sigma-$cebirine göre ölçülebilirdir.

(b) $\forall U \subset \mathbb{R}$ açık alt kümesi için $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$.

(c) $\forall F \subset \mathbb{R}$ kapalı alt kümesi için $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$.

(d) $\forall B \subset \mathbb{R}$ Borel alt kümesi için $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

ÇÖZÜM 7: $(a \Longrightarrow b)$ f fonksiyonu $\mathcal{A}$ $\sigma-$cebirine göre ölçülebilir olsun. (a_k, b_k) açık aralıklar olmak üzere $\mathbb{R}$ nin herbir U açık alt kümesi

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. f fonksiyonu ölçülebilir olmasından

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)\right) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}((a_k, b_k)) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}((-\infty, b_k) \cap (a_k, +\infty)) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(f^{-1}((-\infty, b_k)) \cap f^{-1}((a_k, +\infty))\right) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

elde edilir.

$(b \Longrightarrow c)$ F kapalı ise F^t açıktır. Hipotezden $f^{-1}(F^t) \in \mathcal{A}$ olacaktır. $\mathcal{A}$ $\sigma-$cebir olduğundan

$$\begin{aligned} f^{-1}(F^t) \in \mathcal{A} &\Longrightarrow [f^{-1}(F)]^t \in \mathcal{A} \\ &\Longrightarrow \left\{[f^{-1}(F)]^t\right\}^t \in \mathcal{A} \\ &\Longrightarrow f^{-1}(F) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

gerçeklenir.

$(c \Longrightarrow d)$ $\mathcal{F} := \{F \subset \mathbb{R} : \quad f^{-1}(F) \in \mathcal{A}\}$ sınıfı $\sigma-$cebirdir. $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ olduğundan $F \in \mathcal{F}$ olup $F^t \in \mathcal{F}$ sağlanır. Borel cebiri açık kümelerin en küçük

$\sigma-$cebiri olduğundan $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$ olmalıdır. O halde keyfi $B \subset \mathbb{R}$ Borel kümesi için $B \in \mathcal{F}$ gerçeklenir. Hipotezden ise $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ elde edilir.

$(d \Longrightarrow a)$ $\forall B \subset \mathbb{R}$ Borel kümesi için $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ olsun. $B = (\alpha, \infty)$ alalım. Bu durumda yukarıdaki ifadeden

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in A : \ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

olacaktır. O halde f fonksiyonu ölçülebilirdir.

SORU 8: $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathcal{A}$ ölçülebilir ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda

$$gof : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\mathcal{A}$ ölçülebilirdir. Gösteriniz.

ÇÖZÜM 8: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X : \ (gof)(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} \{x \in X : \ (gof)(x) > \alpha\} &= (gof)^{-1}((\alpha, \infty)) \\ &= \left(f^{-1} o g^{-1}\right)(\alpha, \infty) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. g fonksiyonu sürekli olduğundan $g^{-1}((\alpha, \infty))$ kümesi $\mathbb{R}$ nin açık alt kümesidir. f ölçülebilir fonksiyon olduğundan *Soru 7 nin (b) şıkkından*

$$f^{-1}\left(g^{-1}((\alpha, \infty))\right) \in \mathcal{A}$$

olmalıdır. Bu ise gof fonksiyonunun $\mathcal{A}$ ölçülebilir olduğunu gösterir.

SORU 9: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı tam olsun. $f : X \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon ve hemen hemen heryerde $(h.h.h.)$ $f = g$ ise $g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da ölçülebilirdir.

ÇÖZÜM 9: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X : \quad g(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$X_1 \ : \ = \{x \in X : \quad f(x) = g(x)\}$$

$$X_2 \ : \ = \{x \in X : \quad f(x) \neq g(x)\}$$

olmak üzere $X = X_1 \cup X_2$ dir. Bu durumda hipotez yardımıyla $\mu(X_2) = 0$ gerçeklenir.

$$\{x \in X : \quad g(x) > \alpha\} = \{x \in X_1 : \quad f(x) = g(x) > \alpha\} \cup \{x \in X_2 : \quad f(x) \neq g(x) > \alpha\} \tag{1}$$

olarak yazılabilir. $X_1 \in \mathcal{A}$ olduğu açıktır. f fonksiyonu ölçülebilir olduğundan

$$\{x \in X_1 : \quad f(x) = g(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \tag{2}$$

dır. Diğer taraftan $\{x \in X_2 : \quad f(x) \neq g(x) > \alpha\} \subset X_2$, $X_2 \in \mathcal{A}$ ve $\mu(X_2) = 0$ olduğundan $\{x \in X_2 : \quad f(x) \neq g(x) > \alpha\}$ kümesi $\mu-$boş kümedir. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı tam olduğundan

$$\{x \in X_2 : \quad f(x) \neq g(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \tag{3}$$

gerçeklenir. (2) ve (3) ifadeleri (1) ifadesinde dikkate alınırsa g fonksiyonunun ölçülebilir olması elde edilir.

SORU 10: *"Görüntü kümesi sonlu elemanlı olan fonksiyona* ***basit fonksiyon*** *denir."* $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ basit fonksiyon ve $\varphi(X) = \{a_1, ..., a_p\}$ olsun.

"φ fonksiyonu ölçülebilir $\Longleftrightarrow k = 1, ..., p$ için $\{x \in X : \ \varphi(x) = a_k\} \in \mathcal{A}$"

önermesi doğrudur. Gösteriniz.

ÇÖZÜM 10: $(\Longrightarrow)$ φ fonksiyonu ölçülebilir olsun. Bu durumda $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in X : \ \varphi(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$$

ve

$$\{x \in X : \ \varphi(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$$

sağlanır. Bu ifadeler aşağıda dikkate alınırsa

$$\{x \in X : \ \varphi(x) = a_k\} = \{x \in X : \ \varphi(x) \leq a_k\} \cap \{x \in X : \ \varphi(x) \geq a_k\} \in \mathcal{A}$$

elde edilir.

$(\Longleftarrow)$ $k = 1, ..., p$ için $\{x \in X : \ \varphi(x) = a_k\} \in \mathcal{A}$ olsun.

$$\begin{array}{lll}
\alpha < a_1 \text{ ise} & \{x \in X : \ \varphi(x) > \alpha\} = & X \in \mathcal{A} \\
a_1 \leq \alpha < a_2 & \{x \in X : \ \varphi(x) > \alpha\} = & X \backslash \{x \in X : \ \varphi(x) = a_1\} \in \mathcal{A} \\
a_2 \leq \alpha < a_3 & \{x \in X : \ \varphi(x) > \alpha\} = & X \backslash (\{x \in X : \ \varphi(x) = a_1\} \cup \{x \in X : \ \varphi(x) = a_2\}) \\
... & ... & ...
\end{array}$$

sağlanır. İşlemlere bu şekilde devam edilirse φ fonksiyonunun ölçülebilir olması elde edilir.

SORU 11: Aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$

(b) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$

(c) $\chi_{A^t} = 1 - \chi_A$

ÇÖZÜM 11: **(a)** $x \in A \cap B$ ise $x \in A$ ve $x \in B$ olup $\chi_{A\cap B} = 1$, $\chi_A = 1$, $\chi_B = 1$ olup eşitlik sağlanır.

$x \notin A \cap B$ ise $x \notin A$ veya $x \notin B$ dir. O halde üç durum söz konusudur:

$$x \notin A \ \wedge \ x \in B \implies \chi_A = 0,\ \chi_B = 1 \text{ ve } \chi_{A\cap B} = 0$$

$$x \in A \ \wedge \ x \notin B \implies \chi_A = 1,\ \chi_B = 0 \text{ ve } \chi_{A\cap B} = 0$$

$$x \notin A \ \wedge \ x \notin B \implies \chi_A = 0,\ \chi_B = 0 \text{ ve } \chi_{A\cap B} = 0$$

olup istenilen eşitlik elde edilir.

(b) $x \in A \cup B$ ise $x \in A$ veya $x \in B$ dir. Dolayısıyla üç durum söz konusudur:

$$x \in A \ \wedge \ x \notin B \implies \chi_A = 1,\ \chi_B = 0,\ \chi_{A\cap B} = 0 \text{ ve } \chi_{A\cup B} = 1$$

$$x \notin A \ \wedge \ x \in B \implies \chi_A = 0,\ \chi_B = 1,\ \chi_{A\cap B} = 0 \text{ ve } \chi_{A\cup B} = 1$$

$$x \in A \ \wedge \ x \in B \implies \chi_A = 1,\ \chi_B = 1,\ \chi_{A\cap B} = 1 \text{ ve } \chi_{A\cup B} = 1$$

incelemeleri dikkate alınırsa (b) şıkkındaki eşitlik sağlanır.

$x \notin A \cup B$ ise $x \notin A$ ve $x \notin B$ dir. Bu durumda da (b) şıkkındaki eşitlik gerçeklenir.

(c) $x \in A$ ise $x \notin A^t$ olup $\chi_A = 1$ ve $\chi_{A^t} = 0$ dır. $x \notin A$ ise $x \in A^t$ olup $\chi_A = 0$ ve $\chi_{A^t} = 1$ bulunur. Dolayısıyla (c) şıkkındaki istenilen eşitlik gerçeklenir.

SORU 12: Aşağıdaki kümeler Borel ölçülebilir midir?

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} : \quad e^x \geq \frac{x}{2}\right\}$

(b) $\left\{x \in \mathbb{R} : \quad xsgnx = \frac{3}{2}\right\}$

ÇÖZÜM 12: Hatırlatacak olursak: "$(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay, $A \in \mathcal{A}$ olsun. f ile g, A üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyon ise bu durumda

$$\{x \in A : \quad f(x) < g(x)\}$$

$$\{x \in A : \quad f(x) \leq g(x)\}$$

$$\{x \in A : \quad f(x) = g(x)\}$$

kümeleri ölçülebilirdir."

(a) $f(x) = \frac{x}{2}$, $g(x) = e^x$ fonksiyonları sürekli olduğundan Borel ölçülebilir fonksiyonlardır. O halde yukarıda verilen hatırlatmadan

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \quad e^x \geq \frac{x}{2}\right\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

elde edilir.

(b) $\left\{x \in \mathbb{R} : \quad x sgn x = \frac{3}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \quad |x| = \frac{3}{2}\right\} = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ olup verilen küme Borel ölçülebilirdir.