Bölüm 4: İki Boyutta Hareket

Kavrama Soruları

1- Yerden h yüksekliğinde, yere paralel tutulan bir silah ateşleniyor ve aynı anda silahın yanında başka bir kurşun aynı h yüksekliğinden serbest düşmeye bırakılıyor. Hangi kurşun daha önce yere düşer?
2- Düzgün bir hız ile (sıfır ivmeli) hareket eden bir tren içinde, dışarıyı göremeden, trenin duruyor mu hareketli mi olduğunu nasıl söyleriz (söyleyebilirmiyiz)?
3- Düzgün hızla giden bir trende serbest düşmeye bırakılan bir cismin ivmesi yerdeki bir gözlemci tarafından ölçüldüğünde **g** değerinden daha mı büyük yoksa daha mı küçük bir değer bulunur?

Konu İçeriği

Sunuş

Bu bölümde, bir boyutta türettiğimiz hareket denklemlerini iki boyutta hareket eden parçacık için genelleştireceğiz ve parçacığın hareketini düzlemde tanımlayacağız.

Önce, iki boyutta (düzlemde) hareket eden bir cismin yer değiştirme, hız ve ivmesini tanımlayıp bu nicelikleri vektörel olarak ifade edeceğiz. Daha sonra düzlem üzerinde sabit ivme ile hareket eden cismin hareket denklemlerini ayrıntılı olarak yazıp, sabit ivmeli harekete güzel bir örnek olan eğik atış problemini inceleyeceğiz. Son olarak da birbirlerine göre hareketli olan iki gözlem çerçevesini (referans sistemlerini) inceleyeceğiz.

2-1 Yer değiştirme, Hız ve İvme Vektörleri

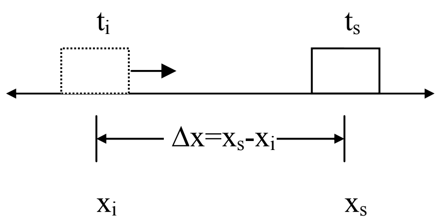
Bu bölümde düzlem üzerinde hareket eden bir cismin hareketini inceleyip cismin yer değiştirmesini, hızını ve ivmesini nasıl bulabileceğimizi göreceğiz.

Bir boyutta hareketi incelerken hareketli cismin bir boyutta yer değiştirmesini, hızını ve ivmesini bulmuştuk. Eğer cisim sadece bir boyutta hareket etmeyip bir düzlem üzerinde hareket ediyor ise yapacağımız şey, cismin hareketini dik koordinat sistemi kullanarak her bir eksen üzerinde (x ve y) ayrı ayrı incelemek ve hareketin herbir eksendeki izdüşümlerini kullanarak yerdeğiştirme, hız ve ivme niceliklerini vektörel olarak en genel bir şekilde ifade etmek olacaktır.

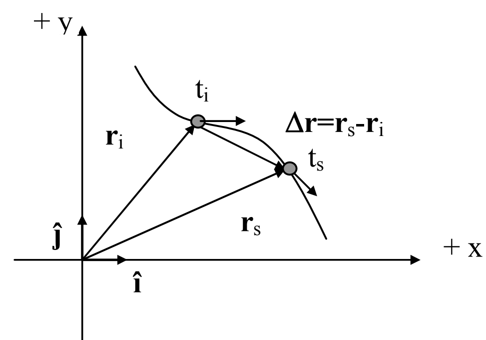
Her bir eksen üzerindeki hareket diğer eksen üzerindeki hareketi etkilemeyeceği için eksenler üzerindeki izdüşümler birbirlerinden bağımsız olacaktır.

Bir ve iki boyuttaki harekete ilişkin fiziksel niceliklerimizi özetlersek:

i) Bir Boyutta Hareket



ii) İki Boyutta Hareket



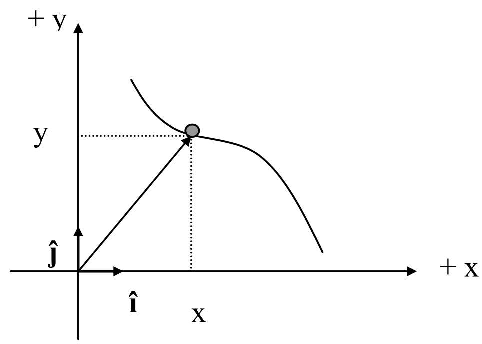
	i) Bir Boyutta Hareket	ii) İki Boyutta Hareket
Konum	x_i: İlk konum x_s: Son konum	$\mathbf{r}_i = x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}}$ $\mathbf{r}_s = x_s\hat{\mathbf{i}} + y_s\hat{\mathbf{j}}$
a) Yerdeğiştirme:	$\Delta x = x_s - x_i$	$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_s - \mathbf{r}_i = (x_s - x_i)\hat{\mathbf{i}} + (y_s - y_i)\hat{\mathbf{j}} = \Delta x\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\hat{\mathbf{j}}$
b) Ortalama Hız	$\nu_{ort} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$	$\nu_{ort} = \dfrac{\Delta r}{\Delta t} = \dfrac{\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \dfrac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$ $\nu_{ort} = (\nu_{ort})_x\hat{i} + (\nu_{ort})_y\hat{j}$
c) Ani Hız	$v \equiv \lim_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$	$v \equiv \lim_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta r}{\Delta t} = \dfrac{dr}{dt}$
d) Ortalama İvme	$a_{ort} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$	$a_{ort} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{\Delta v_x\hat{i} + \Delta v_y\hat{j}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \dfrac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}$ $a_{ort} = (a_{ort})_x\hat{i} + (a_{ort})_y\hat{j}$

e) Ani İvme $a \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt}$ $a \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt}$

Yukarıda iki boyutta türettiğimiz hareket denklemlerini iki boyuta ek olarak üçüncü bir boyut daha (z-ekseni) ekleyerek kolaylıkla üç boyuttaki hareketi tanımlamak için de kullanabiliriz.

4-2 İki Boyutta Sabit İvmeli Hareket

xy düzleminde hareket eden bir parçacık için konum vektörünü $\mathbf{r}=x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}$ şeklinde yazabiliriz.



Parçacığın x- ve y-eksenlerindeki izdüşümleri, parçacığın hareketine bağlı olarak zaman içersinde değişir. Dolayısı ile konumun zamanla nasıl değiştiğine bakarsak cismin hızını bulabiliriz. Parçacığın hızını vektörel olarak

$\mathbf{v}=v_x\hat{\mathbf{i}}+v_y\hat{\mathbf{j}}$ şeklinde yazabiliriz.

Buradaki v_x ve v_y parçacığın hızının x- ve y-eksenlerindeki izdüşümleridir (bileşenleridir). Aynı şekilde hızın zaman içersindeki değişimine bakarsak hareketli cismin ivmesini vektörel olarak;

$\mathbf{a}=a_x\hat{\mathbf{i}}+a_y\hat{\mathbf{j}}$ şeklinde yazabiliriz.

Parçacığın ivmesi sabit olarak kabul edildiği için ivmenin a_x ve a_y bileşenleri de sabit olacaktır. Bu nedenle Bölüm 2'de türettiğimiz kinematik denklemlerini hız vektörünün hem x hem de y bileşenlerine uyarlayabiliriz.

Hız $\mathbf{v}=v_x\hat{\mathbf{i}}+v_y\hat{\mathbf{j}}$

x-bileşeni	***y-bileşeni***
$v_x=v_{ix}+a_xt$	$v_y=v_{iy}+a_yt$

Vektörel olarak yazarsak

$$\mathbf{v}=(v_{ix}+a_xt)\,\hat{\mathbf{i}}+(v_{iy}+a_yt)\,\hat{\mathbf{j}}$$

veya

$$\mathbf{v}=(v_{ix}+v_{iy})\,\hat{\mathbf{i}}+(a_xt+a_yt)\,\hat{\mathbf{j}} \Rightarrow \mathbf{v}=\mathbf{v_i}+\mathbf{a}t$$

Aynı şekilde sabit ivme ile hareket eden bir parçacığın x ve y koordinatları:

$$x=x_i+v_{ix}t+(1/2)a_xt^2$$

$$y=y_0+v_{oy}t+(1/2)a_yt^2$$

Vektörel olarak

$$\mathbf{r}=r_x\hat{\mathbf{i}}+r_y\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{r}=(x_0+v_{ox}t+(1/2)a_xt^2)\hat{\mathbf{i}}+(y_0+v_{oy}t+(1/2)a_yt^2)\hat{\mathbf{j}}$$

veya $$\mathbf{r}=\mathbf{r_0}+\mathbf{v_o}t+(1/2)\mathbf{a}t^2$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 4.1 *Düzlemde Hareket:* Bir parçacık 20 m/s'lik x bileşenli ve -15 m/s'lik y bileşenli ilk hızla t=0'da başlangıç noktasından harekete geçmektedir. Parçacık sadece $a_x=4$ m/s^2 ile verilen ivmenin z bileşeniyle xy düzleminde hareket etmektedir.

a) Zamanın fonksiyonu olarak herhangi bir andaki hızın bileşenlerini ve toplam hız vektörünü bulunuz.
b) t=5saniye de parçacığın hızının büyüklük, yön ve doğrultusunu hesaplayınız.

Çözüm:

a)

v_{0x}= 20 m/s a_x=4 m/s^2
v_{0y}=-15 m/s a_y=0 m/s^2

Herhangi bir andaki hızın bileşenleri

x-bileşeni: $v_x=v_{ox}+a_xt$
$v_x=20+4t$ m/s

y-bileşeni: $v_y=v_{oy}+a_yt$
$v_y=-15+0.t$ m/s=-15 m/s

Vektörel olarak $\mathbf{v}=v_x\hat{\mathbf{i}}+v_y\hat{\mathbf{j}}=(20+4t)\hat{\mathbf{i}}-15\hat{\mathbf{j}}$ m/s bulunur...

b) $\mathbf{v}=(20+4t)\hat{\mathbf{i}}-15\hat{\mathbf{j}}$ m/s

t=5 s deki hızı:

$\mathbf{v}=[(20+4.(5s)]\hat{\mathbf{i}}-15\hat{\mathbf{j}}= 40\hat{\mathbf{i}}-15\hat{\mathbf{j}}$ m/s. Hız bileşenleri: v_x=40 m/s, v_y=-15 m/s.

Yön => $\theta=\tan^{-1}(v_y/v_x)= \tan^{-1}((-15 \text{ m/s})/(40 \text{ m/s}))=-21^o$

Hızın büyüklüğü(sürat) => $|v|=[(v_x)^2+(v_y)^2]^{1/2}=[(40\text{m/s})^2+(-15\text{m/s})^2]^{1/2}$
$|v|$=43 m/s bulunur.

4-3 Eğik Atış Hareketi

İki boyutta sabit ivmeli harekete en güzel örnek eğik atış problemidir. Serbest düşme bir boyutta olmasına rağmen eğik atış iki boyutta gerçekleşmektedir. Çünkü eğik atışta cisim sadece y-ekseni boyunca hareket etmeyip xy düzleminde hareket etmektedir.

Dolayısı ile eğik atış problemini y-ekseni boyunca sabit ivmeli hareket (a_y=-g) ve x-ekseni boyunca ivmenin sıfır olduğu (a_x=0) bir boyutlu iki hareketin bileşkesi olarak düşünebiliriz.

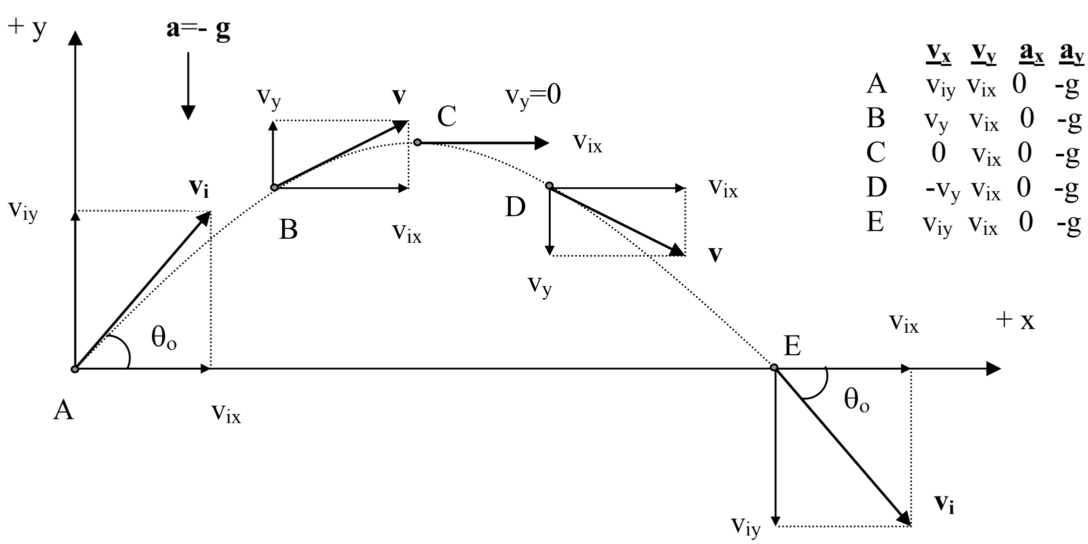
Eğik atış problemini daha ayrıntılı olarak incelerken yapacağımız kabuller:

a) Yerçekimi ivmesinin sabit,
b) Hava direncinin etkisi ihmal edilecektir.

İvme $a_x=0$ $a_y=-g$

Başlangıç konumu $x_i=y_i=0$

Eğik atış problemini geometrik olarak incelersek:



	v_x	v_y	a_x	a_y
A	v_{iy}	v_{ix}	0	-g
B	v_y	v_{ix}	0	-g
C	0	v_{ix}	0	-g
D	$-v_y$	v_{ix}	0	-g
E	v_{iy}	v_{ix}	0	-g

$\mathbf{v_i}$ ilk hız vektörü en genel olarak yatayla θ_o acısı yapar ve bu açıya *atış açısı* denir.

Hızın x- ve y-bileşenleri (v_x ve v_y):

Cisim A noktasından $\mathbf{v_o}$'lık bir ilk hız ile atıldığında hızın x ve y ekseni boyunca izdüşümleri:

$$v_{ix}=v_i\cos\theta_o \qquad v_{iy}=v_i\sin\theta_o$$

olduğundan hızın x- ve y- bileşenleri:

$$v_{ox}=v_o\cos\theta_o \qquad v_{oy}=v_o\sin\theta_o$$

şeklindedir.

x-ekseni boyunca alınan yol: (ekseni boyunca cismin ivmesi sıfır olacağından hızın x bileşeni (v_{ix}) zamanla değişmez)

$a_x=0 \quad => \quad x=v_{ix}t=(v_i\cos\theta_o)t$ 1

y-ekseni boyunca alınan yol:

$a_y=-g \quad => \quad y=v_{iy}t-(1/2)a_yt^2=(v_i\sin\theta_o)t-(1/2)gt^2$ 2

Eğik atış hareketinin yörüngesini nasıl olacağını öğrenmek istersek:

Uçuş süresini 1. eşitlikten bulunup

$$t=x/(v_i\cos\theta_o)$$

2. eşitlikte yerine koyarsak

$$y=(\tan\theta_o)x-\left(\frac{g}{2v^2\cos^2\theta_o}\right)x^2 \text{ elde ederiz}$$

Görüldüğü gibi bu en genel olarak $y=Ax^2+Bx$ şeklinde bir parabol denklemidir. Yani eğik atışta cismin izlediği yol xy düzleminde her zaman bir parabol şeklindedir.

Buradaki katsayılar

$$B=\tan\theta_o$$

$$A=\left(\frac{g}{2v^2\cos^2\theta_o}\right)$$

Örnek 4.2 *Eğik Atış Hareketi:* İlk hızının düşey bileşeni 40 m/s, yatay bileşeni 20 m/s olacak şekilde bir top fırlatılmaktadır. Toplam uçuş zamanını ve topun yere düştüğünde fırlatılış noktasından olan uzaklığını tahmin ediniz.

Çözüm:

v_{0x}= 20 m/s $\quad a_x=0$ m/s^2
v_{0y}= 40 m/s $\quad a_y=-9,8$ m/s^2

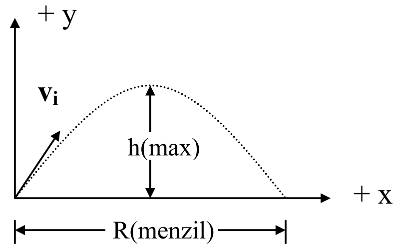
Hız vektörel olarak: $\mathbf{v}=\mathbf{v_o}-\mathbf{g}t$ şeklinde yazılır.

Hızın y bileşeni: $v_y=v_{oy}-gt$
Tepede $v_y=0$ olacağından
$0=v_{oy}-gt_A \;=>\; t_A=v_{oy}/g=(40 \text{ m/s})/(9,8 \text{ m/s}^2)=4$ saniye

Toplam geçen zaman $t=2t_A=2.(4s)=8$ saniye bulunur..

t=8 saniye süresince x yer değiştirmesi:
$x=v_{ox}.t$
$x=(20m/s).(8s)=160$ m

Eğik atışta cismin menzili ve maksimum yüksekliği:



Eğik atışta tepe noktasında hızın y bileşeni $v_y=0$ olacağından, buradan cismin ulaşacağı maksimum yüksekliği bulabiliriz. Bu bilgiyi kullanarak öncelikle maksimum yüksekliğe (h) ulaşması için geçen zamanı(t_A) bulmaya çalışırsak

$v_y=v_{iy}-gt_A$ ve $v_{iy}=v_i\sin\theta_o$ olduğu hatırlanırsa bu iki denklemden

$t_A=(v_i\sin\theta_o)/g$ bulunur.

Maksimum yükseklik

- ⇨ $y=v_{iy}t-(1/2)gt^2$
- ⇨ $y=(v_i\sin\theta_o)t-(1/2)gt^2$

$t=t_A$ da y=h olur. Dolayısı ile
=> $y=(v_i\sin\theta_o).(v_i\sin\theta_o/g)-(1/2)g(v_i\sin\theta_o/g)^2$

$$h=\frac{v_i^2\sin^2(\theta_o)}{2g}$$

R menzili (cismin atıldığı noktadan yere düştüğü nokta arasındaki mesafe) ise, tepe noktasına ulaşmak için geçen zamanın iki katında yani $t_B=2t_A$ zamanı içinde x ekseni boyunca alınan mesafeye eşit olacağından,

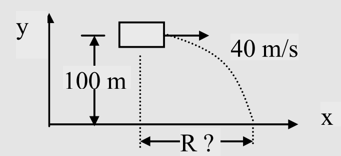
$x=v_{ix}t=(v_i\cos\theta_o)t$
$t_B=2t_A$'da x=R olur. $R=(v_i\cos\theta_o)2t_A=(v_i\cos\theta_o)(v_i\cos\theta_o/g)$

$$R=\frac{2v_i^2\sin(\theta_o)\cos\theta_o}{g}$$

Örnek 4.6 *Kurtarma operasyonu:* Bir uçak zor durumdaki bir kısım kaşife acil kumanya paketi atıyor. Uçak yerden 100 m yükseklikte 40 m/s hızla yatay olarak yol alıyor ise paket bırakıldığı noktaya göre nerede yere çarpar?

Çözüm:

V_{ix}= 40 m/s
v_{iy}= 0 m/s



$x=v_{ix}t$

Eğer paketin havada bulunduğu t süresi bilinirse, paket tarafından yatay doğrultuda alınan yol, x mesafesi, bulunabilir. Paketin yere düştüğü an y-doğrultusunda alınan yol 100 m olacaktır.
y=100 m olacaktır (y=0 olana kadar)

$y=y_i+v_{iy}t-(1/2)gt^2$

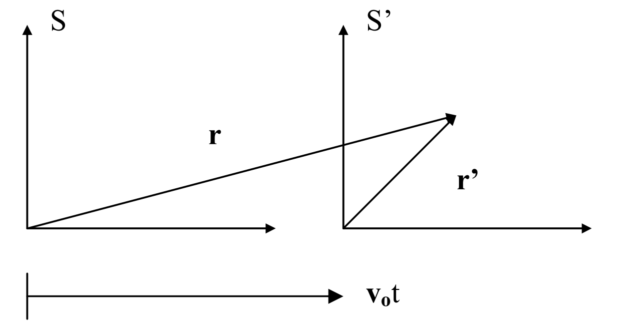
$v_{iy}=0$ ve $y_i=100$ m olacağından => $0=100m-(1/2)gt^2$ => t=4,5 saniye bulunur.

$x=v_{ix}t=R$ olduğundan R=(40m/s).(4,5s)=181 m bulunur...

4-6 Bağıl Hız ve Bağıl İvme:

Fizikte genellikle cisimlerin hareketini tanımlamak için durağan bir gözlem çerçevesi (referans sistemi) seçip hareketli cisimlerin yer değiştirme, hız, ivme vs. gibi fiziksel niceliklerini durağan gözlem çerçevesine göre belirleriz. Fakat bazı durumlarda seçtiğimiz bu gözlem çerçeveleri de hareketli olabilir. Örneğin hareket eden bir gemide yürüyen bir kişinin hareketini gemiyi referans alarak tanımladığımız durumda olduğu gibi. Bu şekildeki tercihlerde, hareketi tanımladığımız gözlem çerçevesi durağan gözlem çerçevesine göre hareketli olduğundan hareketi belirlemek için ölçülen nicelikler iki gözlem çerçevesinde farklı sonuçlar verir. Bu tür durumlarda cismin hareketini hareketli gözlem çerçevesine ve durağan gözlem çerçevesine bağlayan ifadeyi türetmemiz ve hızlar ve ivmeler arasında nasıl bir ilişkinin olduğunu bilmemiz gerekir.

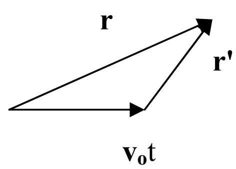
Diyelim ki durağan gözlem çerçevemiz S, hareketli gözlem çerçevemiz de S' olsun. S' gözlem çerçevemiz durağan çerçeveye göre $\mathbf{v_o}$ hızı ile ivmesiz hareket yapsın:



r : parçacığın S sistemine göre konumu
r': parçacığın S' sistemine göre konumu
v_o: S' referans sisteminin S referans sistemine göre hızı

S' hareketli gözlem çerçevesinde hareketli olan cismin:

Durağan gözlem çerçevesine (S) göre konumu $\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{v}_o t$



$\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{v}_o t$ S gözlem çerçevesine göre konum

$\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\mathbf{v}_o t$ S' gözlem çerçevesine göre konum

Hareketli gözlem çerçevesine (S') göre konumu ise: $\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\mathbf{v}_o t$ şeklinde olacaktır.

Hareketli cismin gözlem çerçevelerinde gözlenen hızları arasındaki ilişki;

$$v' = \frac{dr'}{dt} = \frac{dr}{dt} - v_o$$

veya $\mathbf{v}'=\mathbf{v}-\mathbf{v}_o$ olduğu bulunur.

Gözlenen ivmeler arasındaki ilişki ise;

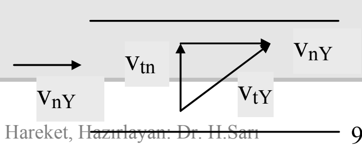
$$a = \frac{dv'}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{dv_o}{dt} \qquad \frac{dv_o}{dt} = 0$$ olduğundan $\mathbf{a}=\mathbf{a}'$ bulunur.

Bu sonuçlar göstermektedir ki birbirlerine göre sabit bir hızla (ivmesiz) hareket eden gözlem çerçevelerinde parçacığın ivmesi her iki gözlem çerçevesinde de aynı; fakat hızı, gözlem çerçevelerinin birbirlerine göre hızları kadar farklı olacaktır.

Yukarıda türettiğimiz bağıl ifadeler sadece birbirlerine göre sabit hızla (ivmesiz) hareket eden gözlem çerçeveleri için geçerli olup, ivmeli gözlem çerçeveleri için geçersizdir.

Örnek 4.9 *Nehri karşıdan karşıya geçen bir tekne:* Kuzeye yönelen bir tekne, geniş bir nehri suya göre 10 km/saat'lik bir hızla karşıdan karşıya geçmektedir. Nehirdeki su doğuya doğru yere göre 5 km/saat'lik düzgün bir hızla sahiptir. Teknenin kıyılardan birinde duran bir gözlemciye göre hızını bulunuz.

Çözüm:



v_{tn} : teknenin nehre göre hızı
v_{nY}: nehrin yere göre hızı

v_{tY} : teknenin yere göre hızı

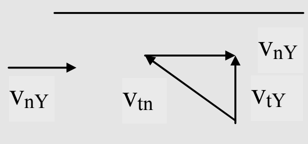
Bu hızlar arasındaki ilişki $\mathbf{v}_{tY}=\mathbf{v}_{tn}+\mathbf{v}_{nY}$
Bulmak istediğimiz hız teknenin yere göre olan hızı, yani v_{tY} dir.

$v_{ty}=[(v_{tn})^2+(v_{ny})^2]^{1/2}=[(10m/s)^2+(5m/s)^2]^{1/2}=11{,}2$ km/saat bulunur

v_{ty}'nin yönü $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{nY}}{v_{tn}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5km/saat}{10km/saat}\right) = 26{,}6^o$

Örnek 4.10 Bir önceki örnekte (örnek 4.9) tekne nehre göre aynı 10 km/saat'lik hızla yol alıyor. Teknenin (v_{tY}) şekilde gösterildiği gibi karşıdan karşıya dik gidebilmesi için yönünün ne olması gerekir?

Çözüm:



v_{tn}: teknenin nehre göre hızı
v_{nY}: nehrin yere göre hızı
v_{tY}: teknenin yere göre hızı

Hızlar arasındaki ilişki yine $\mathbf{v}_{tY}=\mathbf{v}_{tn}+\mathbf{v}_{nY}$ şeklinde yazılır.
Bulmak istediğimiz hız teknenin yere göre olan hızı, yani v_{tY} dir.

$v_{ty}=[(v_{tn})^2-(v_{ny})^2]^{1/2}=[(10m/s)^2-(5m/s)^2]^{1/2}=8{,}66$ km/saat bulunur

v_{ty}'nin yönü $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{nY}}{v_{ty}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5km/saat}{8{,}66km/saat}\right) = 30^o$

Bölüm 4'ün Sonu

Kaynak:

Bu ders notları,
R. A. Serway ve **R. J. Beichner** (Çeviri Editörü: K. Çolakoğlu), **Fen ve Mühendislik için FİZİK-I** (Mekanik), Palme Yayıncılık, 2005.

kitabından derlenmiştir.