1.3. Kompleks Düzlemin Topolojisi

Tanım 1. $\mathcal{D}_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ kümesine z_0 ın bir ε komşuluğu denir.

Tanım 2. Bir $A \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. z_0 ın sadece A nın elemanlarından oluşan bir komşuluğu bulunabiliyorsa z_0 a A nın bir iç noktasıdır denir. Eğer z_0 ın en az bir komşuluğu A nın hiçbir noktasını içermiyorsa z_0 a A nın dış noktasıdır denir.

Eğer z_0 ın her komşuluğu hem A ya ait olan hem de A ya ait olmayan noktalar içeriyorsa z_0 a A nın bir sınır noktasıdır denir. A nın tüm sınır noktalarının cümlesine A nın sınırı denir ve ∂A veya A^s ile gösterilir.

Tanım 3. Eğer bir A kümesinin her bir noktası bir iç nokta ise A ya açık küme adı verilir. Eğer A kümesi tüm sınır noktalarını içeriyorsa A ya kapalı küme denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

Tanım 4. Bir A kümesinin herhangi iki noktası tamamen A da bulunan bir eğri ile birleştirilebiliyorsa A ya bağlantılı (irtibatlı) küme denir.

Tanım 5. Açık ve bağlantılı olan bir A kümesine bölge denir.

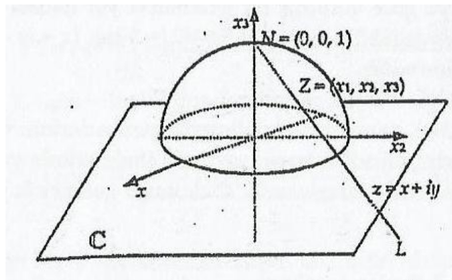
Tanım 6. Eğer bağlantılı bir A kümesi sınır noktalarından bazılarını ve ya tamamını içeriyorsa A ya yöre adı verilir.

1.4. Genişletilmiş Kompleks Düzlem ve Küresel Gösterimi

Kompleks analizde zaman zaman bağımsız değişkenin verilmiş bir noktaya yaklaşması durumunda sonsuz değerini alan fonksiyonlarla karşılaşılır. Bu durumda genişletilmiş düzlem kavramının tanımlanması gerekir. Genişletilmiş düzlem $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \equiv \mathbb{C}_\infty$ ile gösterilir. Ayrıca sonsuz değerini alan fonksiyonların süreklilik özelliklerini inceleyebilmek için $\mathbb{C}_\infty$ üzerinde bir uzaklık fonksiyonunun tanımına ihtiyaç duyulur. Bunu başarabilmek ve $\mathbb{C}_\infty$ un somut bir resmini verebilmek için $\mathbb{C}_\infty \cup \mathbb{R}^3$ de

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

birim küresi olarak gösterilir.



Şimdi bu gösterimi yakından inceleyelim: Herhangi bir $z = x + iy$ noktasına S üzerinde karşılık gelen nokta $Z = (x_1, x_2, x_3)$ olsun. Burada gerekli işlemler yapılarak

$$x_1 = \frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}, \quad x_2 = \frac{-i(z-\overline{z})}{|z|^2+1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$$

biçiminde yazılır. Böylece kompleks düzlemde verilmiş bir z noktasına, S küresi üzerinde karşılık gelen Z noktası bulunmuş olur.

Karşıt durum göz önüne alındığında, yani Z noktası verildiğinde $(Z \neq N)$, z noktası

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

şeklinde bulunur.

Herhangi $z, z' \in \mathbb{C}_\infty$ için z ile z' arasındaki uzaklık $d(z, z')$ ile gösterilir ve bu noktalara $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen Z, Z' noktaları arasındaki uzaklık olarak tanımlanır. Eğer $Z = (x_1, x_2, x_3)$, $Z' = (x_1', x_2', x_3')$ ise, bu durumda

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}$$

olduğu görülür. Benzer biçimde $z \in \mathbb{C}$ için

$$d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{(1+|z|^2)}}$$

bulunur. S nin noktaları ile $\mathbb{C}_\infty$ un noktaları arasındaki bu tekabüle stereografik izdüşüm adı verilir.

Soru 1. Aşağıdaki kümelerin resmini çizerek bölge olup olmadıklarını araştırınız.

1)$|Rez| < |z|$

2)$|z-1| \leq 2|z-2|$

3) $Re(z^2) > 0$

4) $|z-1| < 1$

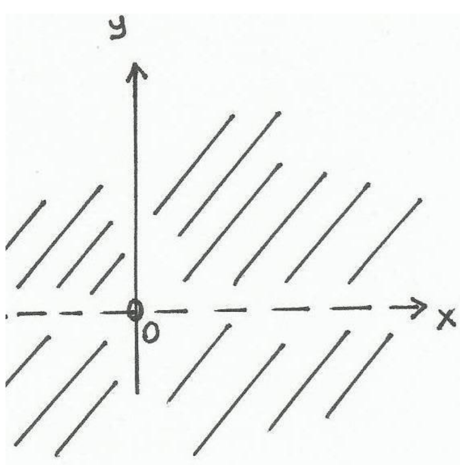
5) $\frac{\pi}{2} < Rez \leq \pi$

6) $\frac{\pi}{4} < Argz \leq \frac{\pi}{3}$

Çözüm. 1) $z = x + iy$ olmak üzere

$$\begin{aligned}|Rez| < |z| &\Rightarrow |x|^2 < |x+iy|^2\\ &\Rightarrow x^2 < x^2 + y^2\\ &\Rightarrow y^2 > 0\\ &\Rightarrow |y| > 0\end{aligned}$$

bulunur.

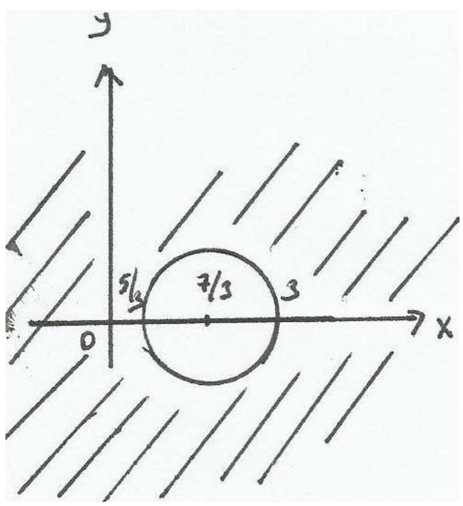


Elde edilen küme açıktır ancak x ekseni ile kesilmiş olduğundan bağlantılı değildir, dolayısıyla bölge belirtmez .

2) $z = x + iy$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|z-1| \leq 2|z-2| &\Rightarrow |x-1+iy| \leq 2|x-2+iy| \\
&\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} \leq 2\sqrt{(x-2)^2+y^2} \\
&\Rightarrow x^2-2x+y^2+1 \leq 4(x^2+y^2-4x+4) \\
&\Rightarrow x^2-2x+y^2+1 \leq 4x^2+4y^2-16x+16 \\
&\Rightarrow 3x^2+3y^2-14x+15 \geq 0 \\
&\Rightarrow x^2+y^2-\frac{14}{3}x+5 \geq 0 \\
&\Rightarrow (x-\frac{7}{3})^2+y^2 \geq \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

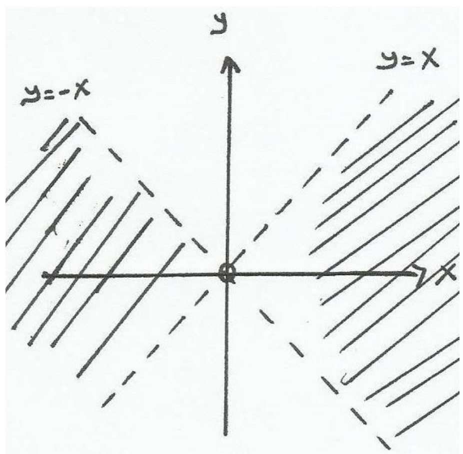
olup bu eşitsizlik merkezi $(\frac{7}{3}, 0)$ yarıçapı $\frac{2}{3}$ olan çember ve dışını belirtir.



Bu küme kapalıdır, bölge belirtmez.

3)

$$\begin{aligned} Re(z^2) > 0 \Rightarrow Re(x^2 - y^2 + 2ixy) > 0 & \\ &\Rightarrow x^2 - y^2 > 0 \\ &\Rightarrow y^2 < x^2 \\ &\Rightarrow |y| < |x| \end{aligned}$$

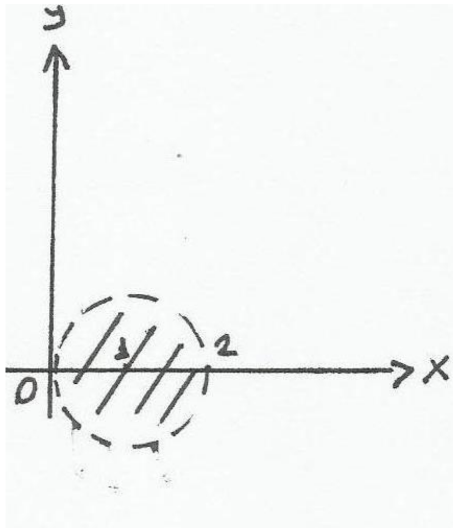


verilen küme açıktır ancak bağlantılı olmadığından bölge değildir.

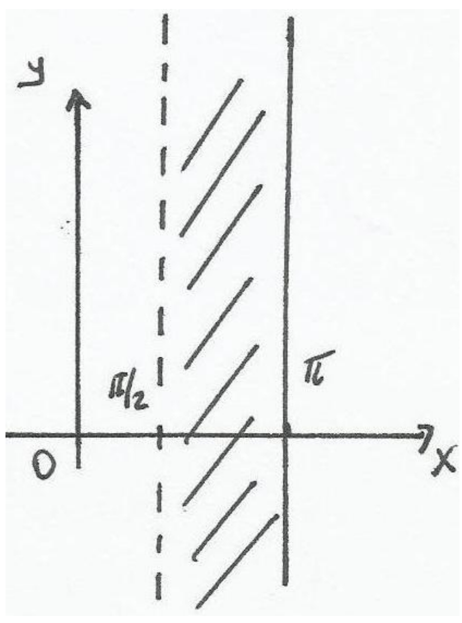
4)

$$\begin{aligned} |z-1| < 1 \Rightarrow & |x - 1 + iy| < 1 \\ \Rightarrow & \sqrt{(x-1)^2 + y^2} < 1 \\ \Rightarrow & (x-1)^2 + y^2 < 1 \end{aligned}$$

eşitsizliği merkezi $(1, 0)$, yarıçapı 1 olan çemberin içini belirtir.
Açık ve bağlantılı olduğundan bölge belirtir.

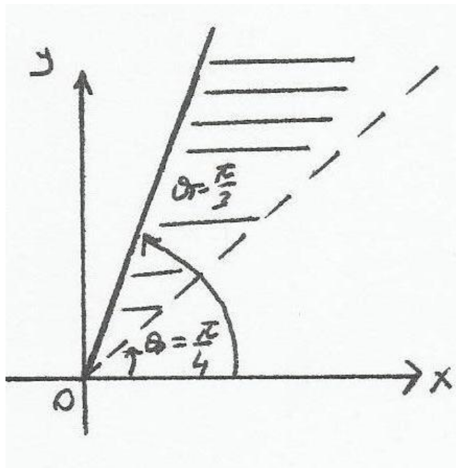


5) $\frac{\pi}{2} < Rez = x \leq \pi$ olup



elde edilen küme sınırların bir kısmını içerdiğinden ne açık ne kapalıdır, dolayısıyla bölge belirtmez.

6) $\frac{\pi}{4} < Argz = \theta \leq \frac{\pi}{3}$ olup



benzer şekilde elde edilen bu küme sınırların bir kısmını içerdiğinden ne açık ne kapalıdır ve bölge belirtmez.

Soru 2. $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$ eşitsizliğinin gösterdiği noktalar kümesini bulunuz.

Çözüm. $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2 \Rightarrow |z-3| < 2|z+3|$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow |x+iy-3| < 2|x+iy+3| \\
&\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} < 2\sqrt{(x+3)^2+y^2} \\
&\Rightarrow x^2+y^2+10x+9 > 0 \\
&\Rightarrow (x+5)^2+y^2 > 16 \\
&\Rightarrow |z+5| > 4
\end{aligned}$$

eşitsizliği $(-5,0)$ merkezli 4 br. yarıçaplı çemberin dışını belirtir.

Soru 3. $Re\left(\frac{1}{z}\right) \geq \frac{1}{2}$ kümesinin bölge olup olmadığını araştırınız.

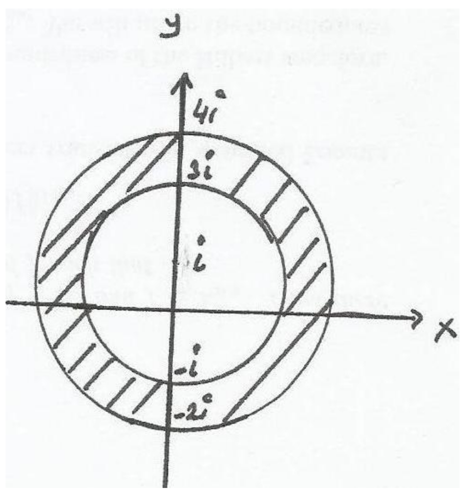
Çözüm. $z = x+iy$ olmak üzere $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ şeklindedir.
Buradan
$Re\left(\frac{1}{z}\right) = Re\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$ bulunur.
O halde,

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2+y^2} \geq \frac{1}{2} &\Rightarrow 2x \geq x^2+y^2 \\ &\Rightarrow x^2+y^2-2x \leq 0 \\ &\Rightarrow (x-1)^2+y^2 \leq 1\end{aligned}$$

olur ve buradan merkezi $(1,0)$, yarıçapı 1 olan daire bulunur. Bu küme kapalı ve bağlantılı olduğundan yöredir.

Soru 4. $2 \leq |z-i| \leq 3$ kümesinin bölge olup olmadığını araştırınız.

Çözüm. Verilen küme merkezi $(0,1)$, yarıçapı 2 ve merkezi $(0,1)$, yarıçapı 3 olan çemberler ve çemberler arasında kalan halkadır. Sınır noktalarını içerdiğinden kapalıdır, ayrıca bağlantılıdır, dolayısıyla yöre belirtir.



Soru 5. $\mathbb{C}_\infty$ da $z = 1+2i$ ve $z' = 3-4i$ noktaları veriliyor.

a) S de bunlara karşılık gelen Z ve Z' noktalarının koordinatlarını,

b) $d(z, z')$ uzaklığını,

c) $d(1+2i, \infty)$, $d(3-4i, \infty)$ uzaklıklarını bulunuz.

Çözüm. a) $z = 1 + 2i$ için $\overline{z} = 1 - 2i$ ve $|z|^2 = z\overline{z} = (1 + 2i)(1 - 2i) = 1 + 4 = 5$ bulunur.

Bulunan değerler

$$x_1 = \frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{-i(z - \overline{z})}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

formülünde yerlerine yazılarak

$$Z = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

elde edilir.

Benzer şekilde $z' = 3 - 4i$ için $\overline{z} = 3 + 4i$ ve $|z|^2 = z\overline{z} = (3 - 4i)(3 + 4i) = 9 + 16 = 25$ bulunur. Bulunan değerler

$$x_1 = \frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{-i(z - \overline{z})}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

formülünde yerlerine yazılarak

$$Z' = (\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13})$$

elde edilir.

b)

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}} = \frac{2|1 + 2i - 3 + 4i|}{\sqrt{(1 + 5)(1 + 25)}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{26}}$$

bulunur.

c)

$$d(1 + 2i, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + 5}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

ve

$$d(3 - 4i, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{13}}$$

bulunur.

Soru 6. S üzerindeki $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ noktasına stereografik izdüşümle $\mathbb{C}_\infty$ da karşılık gelen noktayı bulunuz.

Çözüm.

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} = \frac{\frac{2}{5} + \frac{3i}{5}}{\frac{1}{5}} = 2 + 3i$$

elde edilir.

Alıştırmalar

1) Aşağıdaki kümelerin kapanışlarını çiziniz.

$$\mathbf{a)}|Re(z)| < |z| \quad \mathbf{b)} -\pi < argz < \pi \ \ (z \neq 0) \quad \mathbf{c)} Re(1/z) \leq \frac{1}{2}$$

2) Aşağıdaki bağıntıların herbirinin belirttiği kümeyi kompleks düzlemde gösteriniz.

$$\mathbf{a)}|Re(z)| < 2 \quad \mathbf{b)}|z-4| > 3 \quad \mathbf{c)}|z-1+3i| \leq 1$$

$$\mathbf{d)}|Im(z)| > 1 \quad \mathbf{e)}|Re(z)| > 0 \quad \mathbf{f)} Im(z^2) > 0$$

3) $\emptyset$ ve $\mathbb{C}$ nin hem açık hem kapalı olduğunu gösteriniz.

4) Sonlu tane kapalı kümenin birleşimi ve herhangi sayıda kapalı kümenin arakesitinin de kapalı kümeler olduğunu gösteriniz.

5) '$\mathcal{S}$ kapalı küme $\Leftrightarrow$ $\mathcal{S}$ tüm yığılma noktalarını bulundurur' önermesini ispatlayınız.

6) z ve z' noktalarının S üzerindeki karşılıkları, sırası ile, Z ve Z' olsun. Ayrıca $z+z'$ noktasının S üzerindeki karşılığı da W olsun. W nin koordinatlarını Z ve Z' nün koordinatları cinsinden yazınız.