2.6. Cauchy- Riemann Denklemleri

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonunun bir $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında $f'(z_0)$ türevi mevcut olsun. Bu durumda u ile v nin x ve y ye göre birinci mertebeden kısmi türevleri (x_0, y_0) da vardır ve bu kısmi türevler (x_0, y_0) da

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$$

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

Cauchy-Riemann denklemlerini sağlarlar.

Karşıt olarak, $f(z)$ fonksiyonu $z_0 = (x_0, y_0)$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere, eğer (x_0, y_0) noktasında tüm u_x, u_y, v_x ve v_y kısmi türevleri mevcut ve sürekli ve Cauchy-Riemann denklemleri sağlanıyorsa, bu durumda f, z_0 da diferensiyellenebilirdir ve $f'(z_0)$ türevi

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

yada

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

ile hesaplanabilir.

Soru 1. $\forall z \in \mathbb{C}$ için $f(z) = z^2$ nin $f'(z) = 2z$ türevi vardır, gösteriniz.

Çözüm. $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ olmak üzere

$$u(x,y) = x^2 - y^2$$

ve

$$v(x,y) = 2xy$$

için $u_x(x,y) = v_y(x,y)$ ve $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$ Cauchy-Riemann denklemleri sağlanmalıdır.

$u_x = 2x$, $u_y = -2y$, $v_x = 2y$, $v_y = 2x$ olup $\forall (x,y)$ için Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır. Kısmi türevler süreklidir, o halde $f'(z)$ vardır.

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2iy = 2(x + iy) = 2z$$

olarak elde edilir.

Soru 2. $f(z) = \overline{z}$ fonksiyonu hiçbir yerde türevlenemez, gösteriniz.

Çözüm. $f(z) = \overline{z} = x - iy$ olup buradan

$$u(x, y) = x$$

ve

$$v(x, y) = -y$$

için Cauchy-Riemann denklemleri sağlanmalıdır.

$u_x = 1$, $u_y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = -1$ olup $u_x \neq v_y$ olduğundan hiçbir yerde Cauchy-Riemann denklemleri sağlanmaz. O halde $f'(z)$ mevcut değildir.

Soru 3.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(\overline{z})^2}{z}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu için $z = 0$ da Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlanmasına rağmen $f'(0)$ türevinin bulunmadığını gösteriniz.

Çözüm.

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$v(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$u_x(0, 0) = v_y(0, 0)$ ve $u_y(0, 0) = -v_x(0, 0)$ Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlandığı gösterilmelidir.

$$u_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h}$$

olur ve

$$\begin{aligned} u_x(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$u_y(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + k) - u(x_0, y_0)}{k}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} u_y(0,0) &= \lim_{k \to 0} \frac{u(0,k) - u(0,0)}{k} \\ &= \lim_{k \to 0} \frac{\frac{0}{k^2} - 0}{k} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_x(0,0) &= \lim_{m \to 0} \frac{v(m,0) - v(0,0)}{m} \\ &= \lim_{m \to 0} \frac{\frac{0}{m^2} - 0}{m} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_y(0,0) &= \lim_{l \to 0} \frac{v(0,l) - v(0,0)}{l} \\ &= \lim_{l \to 0} \frac{\frac{l^3}{l^2} - 0}{l} = 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

$u_x(0,0) = v_y(0,0)$ ve $u_y(0,0) = -v_x(0,0)$ sağlandığından Cauchy-Riemann denklemleri gerçeklenir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} &= \lim_{z\to 0} \frac{\frac{(\overline{z})^2}{z} - 0}{z} \\ &= \lim_{z\to 0} \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^2 \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x-iy}{x+iy}\right)^2 \end{aligned}$$

bulunur.

1) Reel eksen boyunca orijine yaklaşılırsa ($y = 0$ olur.)

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{x}\right)^2 = 1$$

2) $y = x$ boyunca orijine yaklaşılırsa

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x-ix}{x+ix}\right)^2 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$$

bulunur. Limitler farklı olduğundan $f'(0)$ yoktur.

Soru 4. $f(z) = \frac{1}{r}(cos\theta - isin\theta)$, $(r > 0, -\pi < \theta \leq \pi)$ nin türevini hesaplayınız.

Çözüm.

$$u(r,\theta) = \frac{1}{r} cos\theta$$

$$v(r,\theta) = -\frac{1}{r} sin\theta$$

olup buradan

$u_r = -\frac{1}{r^2}cos\theta$, $v_r = \frac{1}{r^2}sin\theta$, $u_\theta = -\frac{1}{r}sin\theta$ ve $v_\theta = -\frac{1}{r}cos\theta$ bulunur.

Kutupsal formda Cauchy-Riemann denklemleri

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta$$

ve

$$v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$$

şeklindedir ve u ve v fonksiyonları için kutupsal formda Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır. Kısmi türevler süreklidir, o halde $f'(z)$ vardır.

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-i\theta}(u_r + iv_r) \\ &= e^{-i\theta}\left(-\frac{1}{r^2}cos\theta + i\frac{1}{r^2}sin\theta\right) \\ &= -\frac{1}{r^2}e^{-i\theta}(cos\theta - isin\theta) \\ &= -\frac{1}{r^2}e^{-i\theta}e^{-i\theta} \\ &= -\frac{1}{r^2}e^{-2i\theta} = -\frac{1}{(re^{i\theta})^2} = -\frac{1}{z^2}, \;\; z \neq 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Alıştırmalar

1) Aşağıdaki fonksiyonların hiçbir noktada diferensiyellenemediğini gösteriniz.

a) $f(z) = x$

b)

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3y(y-ix)}{x^6+y^2}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$$

c) $f(z) = 3ix$

d) $f(z) = ie^y$

2) $f(z) = (x^2 + 2y) + i(x^2 + y^2)$ şeklinde tanımlansın. f nin türevinin olduğu noktaları bulunuz.

3)

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu için $z = 0$ da Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlanmasına rağmen $f'(0)$ türevinin bulunmadığını gösteriniz.