

# EOB127-Sayısal Elektronik

4.Hafta – Bileşik Mantık İfadelerinin Sadeleştirilmesi

Öğr. Gör. Gökhan Manav

# Bu Hafta Anlatılacak Konu Başlıkları

- Boole Kuralları ile Bileşik Mantık İfadesinin Sadeleştirilmesi
- Karnaugh (Karno) Haritaları ile Bileşik Mantık İfadesinin Sadeleştirilmesi
- Quine McCluskey (Tablo Yöntemi)

# Boole Cebri ile Sadeleştirme

- Karmaşık lojik ifadeler, yukarıda özetlenen boolean matematiğindeki kurallardan faydalanarak sadeleştirilebilirler (basitleştirilebilirler).
- Sadeleştirilen lojik ifadelerden oluşturulacak elektronik devreler, hem daha basit hem de daha ucuz olarak gerçekleştirilebilirler.

# Karno Haritaları ile Sadeleştirme

- Bileşik mantık ifadelerin giriş sayısı arttıkça lojik ifadeler arasındaki ilişkileri görmek zorlaşır. Bu durumda sadeleştirme işlemleri daha uzun vakit alır, dikkat ve tecrübe ister. Yada devrenin en sade hali elde edilemeyebilir.
- Karno haritaları bileşik mantık devrelerini görselleştirir ve daha sade hallerinin elde edilmesi kolaylaşır.
- Bir sistem üzerinde giriş parametrelerinden sadece bir tanesinin değişmesi ile çıkışta bir değişim gerçekleşmiyorsa, geçişin gerçekleştiği durum için değişen parametre etkisiz elemandır.
- Bu temel sebepten ötürü Karnaugh Haritalarının adreslemeleri Gray Kodu kullanılarak yapılmaktadır.

# Karno Haritaları

$F(A,B)$  bileşik mantık ifadesi için miniterimler gösterimi

$A \setminus B$	0	1
0	$m_0$	$m_1$
1	$m_2$	$m_3$

$F(A,B)$  bileşik mantık ifadesi için maksiterim gösterimi

$A \setminus B$	0	1
0	$M_0$	$M_1$
1	$M_2$	$M_3$



# Quine Mccluskey (Tablo Yöntemi)

- Karno Haritaları her ne kadar bileşik mantık devrelerinin sadeleştirmesinde görsellik barınsa da 5 ve daha fazla değişken içeren mantık ifadelerinde harita hücreleri arasında yeni komşuluklar oluşmaktadır. 7 ve daha fazla değişkene sahip logic ifadelerin Karno Haritaları ile sadeleştirilmesi zorlaşmaktadır.
- Tablo Yöntemi bileşim mantık devlerinin sadeleştirilmesinde daha sistematik bir yöntem kullanmaktadır. Böylece bileşik mantık ifadelerinin sadeleştirilmesi bilgisayar programları vasıtası ile gerçekleştirilebilir olmuştur.

- Bu ders kapsamında ele alınacak mantık devreleri genellikle 3 ya da 4 giriş sahip olacaktır. Bu sebepe önceki slaytlarda bahsedilen yöntemlerden Karno Haritası Yöntemi ders kapsamında anlatılan örneklerin sadeleştirilmesinde kullanılabilecek en uygun yöntemdir.
- Bununla birlikte diğer yöntemlerin tanınması da oldukça önemlidir. Bu haftaki dersimizde tüm sadeleştirme yöntemleri verilen örnekler üzerinden anlatılmaya çalışılacaktır.

$$F(A,B,C)=A'.B'.C + A'.B.C + A.B'$$

Boole Cebrini kullanarak:

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= A'.B'.C + A'.B.C + A.B' \\ &= A'.C.(B+B') + A.B' \\ &= A'.C + A.B' \end{aligned}$$



$$F(A,B,C)=A'.B'.C + A'.B.C + A.B'$$

Karno Harita Yöntemini kullanarak:

Öncelikle verilen ifadeyi miniterim ya da maksiterim halinde yazılmalı.

$$\begin{aligned}F(A,B,C) &= A'.B'.C + A'.B.C + A.B' \\ &= A'.B'.C + A'.B.C + A.B'C + A.B'C' \\ &= m_1 + m_3 + m_5 + m_4 \\ &= m_1 + m_3 + m_4 + m_5 \\ &= \sum(1,3,4,5) \\ &= \prod(0,2,6,7)\end{aligned}$$

Miniterim

A\BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	0	0

Maksiterim

A\BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	0	0

$$F(A,B,C)=A'.B'.C + A'.B.C + A.B'$$

Karno Harita Yöntemini kullanarak:

Öncelikle verilen ifadeyi miniterim ya da maksiterim halinde yazılmalı.

$$\begin{aligned}F(A,B,C) &= A'.B'.C + A'.B.C + A.B' \\ &= A'.B'.C + A'.B.C + A.B'C + A.B'C' \\ &= m_1 + m_3 + m_5 + m_4 \\ &= m_1 + m_3 + m_4 + m_5 \\ &= \sum(1,3,4,5) \\ &= \prod(0,2,6,7)\end{aligned}$$

Miniterim

A\BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	0	0

$$F(A,B,C) = A'.C$$

Maksiterim

A\BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	0	0

$$F(A,B,C) = A'+B'$$

$$F(A,B,C)=A'.B'.C + A'.B.C + A.B'$$

Karno Harita Yöntemini kullanarak:

Öncelikle verilen ifadeyi miniterim ya da maksiterim halinde yazılmalı.

$$\begin{aligned}F(A,B,C) &= A'.B'.C + A'.B.C + A.B' \\ &= A'.B'.C + A'.B.C + A.B'C + A.B'C' \\ &= m_1 + m_3 + m_5 + m_4 \\ &= m_1 + m_3 + m_4 + m_5 \\ &= \sum(1,3,4,5) \\ &= \prod(0,2,6,7)\end{aligned}$$

Miniterim

A\BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	0	0

$$F(A,B,C) = A'.C + A.B'$$

Maksiterim

A\BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	0	0

$$F(A,B,C) = (A'+B').(A+C)$$

$$F(A,B,C)=A'.B'.C + A'.B.C + A.B'$$

Tablo Yöntemini kullanarak:

- Bu yöntemde de verilen ifadenin miniterim ya da maksiterim hali elde edilir.

$$F(A,B,C)=\sum(1,3,4,5)$$

	A	B	C	
m1	0	0	1	m1, 001 m4, 100
m3	0	1	1	m3, 011 m5, 101
m4	1	0	0	
m5	1	0	1	



$$F(A,B,C)=A'.B'.C + A'.B.C + A.B'$$

## Tablo Yöntemini kullanarak:

- Bu yöntemde de verilen ifadenin miniterim ya da maksiterim hali elde edilir.

$$F(A,B,C)=\sum(1,3,4,5)$$

	A	B	C		
m1	0	0	1	m1, 001 m4, 100	m1,m3, 0-1 m4,m5 10-
m3	0	1	1	m3, 011 m5, 101	
m4	1	0	0		
m5	1	0	1		

$$F(A,B,C)=A'.B'.C + A'.B.C + A.B'$$

## Tablo Yöntemini kullanarak:

- Bu yöntemde de verilen ifadenin miniterim ya da maksiterim hali elde edilir.

$$F(A,B,C)=\sum(1,3,4,5)$$

	A	B	C		
m1	0	0	1	m1, 001 m4, 100	m1,m3, 0-1 m4,m5 10-
m3	0	1	1	m3, 011 m5, 101	
m4	1	0	0		
m5	1	0	1		

Mantık ifadesi	1	3	4	5
A'C	X	X		
AB'			X	X

$$F(A,B,C)=A'.B'.C + A'.B.C + A.B'$$

## Tablo Yöntemini kullanarak:

- Bu yöntemde de verilen ifadenin miniterim ya da maksiterim hali elde edilir.

$$F(A,B,C)=\sum(1,3,4,5)$$

	A	B	C		
m1	0	0	1	m1, 001 m4, 100	m1,m3, 0-1 m4,m5 10-
m3	0	1	1	m3, 011 m5, 101	
m4	1	0	0		
m5	1	0	1		

Mantık ifadesi	1	3	4	5
A'C	X	X		
AB'			X	X

$$F(A,B,C) = A'C$$

$$F(A,B,C)=A'.B'.C + A'.B.C + A.B'$$

## Tablo Yöntemini kullanarak:

- Bu yöntemde de verilen ifadenin miniterim ya da maksiterim hali elde edilir.

$$F(A,B,C)=\sum(1,3,4,5)$$

	A	B	C		
m1	0	0	1	m1, 001 m4, 100	m1,m3, 0-1 m4,m5 10-
m3	0	1	1	m3, 011 m5, 101	
m4	1	0	0		
m5	1	0	1		

Mantık ifadesi	1	3	4	5
A'C	X	X		
AB'			X	X

$$F(A,B,C) = A'C + AB'$$



$$F(A,B,C)=A'.B'.C + A'.B.C + A.B'$$

Tablo Yöntemini kullanarak:

- Bu yöntemde de verilen ifadenin miniterim ya da maksiterim hali elde edilir.

$$F(A,B,C)=\prod(0,2,6,7)$$

	A	B	C	
M0	0	0	0	M7, 111
M2	0	1	0	M6, 110
M6	1	1	0	M2, 010
M7	1	1	1	M0, 000

$$F(A,B,C)=A'.B'.C + A'.B.C + A.B'$$

Tablo Yöntemini kullanarak:

- Bu yöntemde de verilen ifadenin miniterim ya da maksiterim hali elde edilir.

$$F(A,B,C)=\prod(0,2,6,7)$$

	A	B	C		
M0	0	0	0	M7, 111	M6,M7, 11-
M2	0	1	0	M6, 110	M2,M0, 0-0
M6	1	1	0	M2, 010	
M7	1	1	1	M0, 000	

$$F(A,B,C)=A'.B'.C + A'.B.C + A.B'$$

## Tablo Yöntemini kullanarak:

- Bu yöntemde de verilen ifadenin miniterim ya da maksiterim hali elde edilir.

$$F(A,B,C)=\prod(0,2,6,7)$$

	A	B	C		
M0	0	0	0	M7, 111	M6,M7, 11-
M2	0	1	0	M6, 110	M2,M0, 0-0
M6	1	1	0	M2, 010	
M7	1	1	1	M0, 000	

Mantık ifadesi	0	2	6	7
A'+B'			X	X
A+C	X	X		

$$F(A,B,C)=A'.B'.C + A'.B.C + A.B'$$

## Tablo Yöntemini kullanarak:

- Bu yöntemde de verilen ifadenin miniterim ya da maksiterim hali elde edilir.

$$F(A,B,C)=\prod(0,2,6,7)$$

	A	B	C		
M0	0	0	0	M7, 111	M6,M7, 11-
M2	0	1	0	M6, 110	M2,M0, 0-0
M6	1	1	0	M2, 010	
M7	1	1	1	M0, 000	

Mantık ifadesi	0	2	6	7
A'+B'			X	X
A+C	X	X		

$$F(A,B,C) = (A'+B')$$



$$F(A,B,C)=A'.B'.C + A'.B.C + A.B'$$

## Tablo Yöntemini kullanarak:

- Bu yöntemde de verilen ifadenin miniterim ya da maksiterim hali elde edilir.

$$F(A,B,C)=\prod(0,2,6,7)$$

	A	B	C		
M0	0	0	0	M7, 111	M6,M7, 11-
M2	0	1	0	M6, 110	M2,M0, 0-0
M6	1	1	0	M2, 010	
M7	1	1	1	M0, 000	

Mantık ifadesi	0	2	6	7
$A'+B'$			X	X
$A+C$	X	X		

$$F(A,B,C) = (A'+B') \cdot (A+C)$$

# Elde Edilen Miniterim ve Maksiterim Çözümlerinin Karşılaştırılması

Miniterimden elde edilen ifade

A	B	C	A'	B'	A.C'	A.B'	A.C'+A.B'
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0

Maksiterimden elde edilen ifade

A	B	C	A'	B'	A'+B'	A+C	(A'+B').(A+C)
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0

15 Dakika Ara



$$F(A,B,C)=A.B + A'.C + B.C$$

Boole Cebrini kullanarak:

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= A.B + A'.C + B.C \\ &= A.B + A'.C + B.C.(A+A') \\ &= A.B.1 + A'.C.1 + A.B.C + A'.B.C \\ &= A.B.(1+C) + A'.C.(1+B) \\ &= A.B + A'.C \end{aligned}$$

$$F(A,B,C)=A.B + A'.C + B.C$$

Karno Haritasını kullanarak:

Öncelikle verilen ifadeyi miniterim halinde yazılmalı.

$$F(A,B,C) = A.B + A'.C + B.C$$

$$=A.B.C + A.B.C' + A'.B.C + A'.B'.C + A.B.C + A'.B.C$$

$$=m7 + m6 + m3 + m1 + m7 + m3$$

$$=m7 + m6 + m3 + m1$$

$$=\Sigma(1,3,6,7)$$

A\BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1



$$F(A,B,C)=A.B + A'.C + B.C$$

Karno Haritasını kullanarak:

Öncelikle verilen ifadeyi miniterim halinde yazılmalı.

$$F(A,B,C) = A.B + A'.C + B.C$$

$$=A.B.C + A.B.C' + A'.B.C + A'.B'.C + A.B.C + A'.B.C$$

$$=m7 + m6 + m3 + m1 + m7 + m3$$

$$=m7 + m6 + m3 + m1$$

$$=\Sigma(1,3,6,7)$$

A\BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1

$$F(A,B,C) = A'.C +$$

$$F(A,B,C)=A.B + A'.C + B.C$$

Karno Haritasını kullanarak:

Öncelikle verilen ifadeyi miniterim halinde yazılmalı.

$$\begin{aligned}F(A,B,C) &= A.B + A'.C + B.C \\ &= A.B.C + A.B.C' + A'.B.C + A'.B'.C + A.B.C + A'.B.C \\ &= m_7 + m_6 + m_3 + m_1 + m_7 + m_3 \\ &= m_7 + m_6 + m_3 + m_1 \\ &= \sum(1,3,6,7)\end{aligned}$$

A\BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1

$$F(A,B,C) = A'.C + A.B$$

$$F(A,B,C)=A.B + A'.C + B.C$$

Tablo Yöntemini kullanarak:

- $F(A, B, C) = \sum(1,3,6,7)$

	A	B	C	
m1	0	0	1	m1, 001
m3	0	1	1	m3, 011 m6, 110
m6	1	1	0	m7, 111
m7	1	1	1	

$$F(A,B,C)=A.B + A'.C + B.C$$

Tablo Yöntemini kullanarak:

- $F(A, B, C) = \sum(1,3,6,7)$

	A	B	C		
m1	0	0	1	m1, 001	m1,m3, 0-1
m3	0	1	1	m3, 011 m6, 110	m6,m7, 11-
m6	1	1	0	m7, 111	
m7	1	1	1		

$$F(A,B,C)=A.B + A'.C + B.C$$

Tablo Yöntemini kullanarak:

- $F(A,B,C) = \sum(1,3,6,7)$

	A	B	C		
m1	0	0	1	m1, 001	m1,m3, 0-1
m3	0	1	1	m3, 011 m6, 110	m6,m7, 11-
m6	1	1	0	m7, 111	
m7	1	1	1		

Mantık ifadesi	1	3	6	7
A'C	X	X		
AB			X	X



$$F(A,B,C)=A.B + A'.C + B.C$$

Tablo Yöntemini kullanarak:

- $F(A,B,C) = \sum(1,3,6,7)$

	A	B	C		
m1	0	0	1	m1, 001	m1,m3, 0-1
m3	0	1	1	m3, 011	m6,m7, 11-
				m6, 110	
m6	1	1	0	m7, 111	
m7	1	1	1		

Mantık ifadesi	1	3	6	7
A'C	X	X		
AB			X	X

$$F(A,B,C)=A'C$$

# $F(A,B,C)=A.B + A'.C + B.C$

## Tablo Yöntemini kullanarak:

- $F(A,B,C) = \sum(1,3,6,7)$

	A	B	C		
m1	0	0	1	m1, 001	m1,m3, 0-1
m3	0	1	1	m3, 011	m6,m7, 11-
				m6, 110	
m6	1	1	0	m7, 111	
m7	1	1	1		

Mantık İfadesi	1	3	6	7
A'C	X	X		
AB			X	X

$$F(A,B,C)=A'C + AB$$

### ÖNEMLİ

Bu sorunun Karno Haritaları ve Tablo Yöntemini kullanarak maksiterim yaklaşımı ile çözümü ödevinizdir.

$$F(A,B,C)=A'B'C'+A'B'C+ABC'+AB'C$$

Boole Cebrini kullanarak:

$$\begin{aligned}F(A,B,C) &= A'B'C' + A'B'C + ABC' + AB'C' \\ &= A'B' \cdot (C+C') + AC' \cdot (B+B') \\ &= A'B' + AC'\end{aligned}$$

$$F(A,B,C)=A'B'C'+A'B'C+ABC'+AB'C$$

Karno Haritasını kullanarak:

$$\begin{aligned}F(A,B,C) &= A'B'C' + A'B'C + ABC' + AB'C' \\ &= m_0 + m_1 + m_6 + m_4 \\ &= m_0 + m_1 + m_4 + m_6 \\ &= \sum(0,1,4,6) \\ &= \prod(2,3,5,7)\end{aligned}$$

A\BC	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	0	0	1

$$F(A,B,C)=A'B'C'+A'B'C+ABC'+AB'C$$

Karno Haritasını kullanarak:

$$\begin{aligned}F(A,B,C) &= A'B'C' + A'B'C + ABC' + AB'C' \\ &= m_0 + m_1 + m_6 + m_4 \\ &= m_0 + m_1 + m_4 + m_6 \\ &= \sum(0,1,4,6) \\ &= \prod(2,3,5,7)\end{aligned}$$

A\BC	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	0	0	1

$$F(A,B,C)=(A'+C')$$



$$F(A,B,C)=A'B'C'+A'B'C+ABC'+AB'C$$

Karno Haritasını kullanarak:

$$\begin{aligned}F(A,B,C) &= A'B'C' + A'B'C + ABC' + AB'C' \\ &= m_0 + m_1 + m_6 + m_4 \\ &= m_0 + m_1 + m_4 + m_6 \\ &= \sum(0,1,4,6) \\ &= \prod(2,3,5,7)\end{aligned}$$

A\BC	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	0	0	1

$$F(A,B,C)=(A'+C') \cdot (A+B')$$

$$F(A,B,C)=A'B'C'+A'B'C+ABC'+AB'C$$

Tablo Yöntemini kullanarak:

$$F(A,B,C)=\prod(2,3,5,7)$$

	A	B	C	
M2	0	1	0	M7, 111
M3	0	1	1	M3, 011 M5, 101
M5	1	0	1	M2, 010
M7	1	1	1	

$$F(A,B,C)=A'B'C'+A'B'C+ABC'+AB'C$$

Tablo Yöntemini kullanarak:

$$F(A,B,C)=\prod(2,3,5,7)$$

	A	B	C		
M2	0	1	0	M7, 111	M5,M7, 1-1
M3	0	1	1	M3, 011 M5, 101	M2,M3, 01-
M5	1	0	1	M2, 010	
M7	1	1	1		

$$F(A,B,C)=A'B'C'+A'B'C+ABC'+AB'C$$

Tablo Yöntemini kullanarak:

$$F(A,B,C)=\prod(2,3,5,7)$$

	A	B	C		
M2	0	1	0	M7, 111	M5,M7, 1-1
M3	0	1	1	M3, 011 M5, 101	M2,M3, 01-
M5	1	0	1	M2, 010	
M7	1	1	1		

Mantık İfadesi	2	3	5	7
$A'+C'$			X	X
$A+B'$	X	X		

$$F(A,B,C)=A'B'C'+A'B'C+ABC'+AB'C$$

Tablo Yöntemini kullanarak:

$$F(A,B,C)=\prod(2,3,5,7)$$

	A	B	C		
M2	0	1	0	M7, 111	M5,M7, 1-1
M3	0	1	1	M3, 011	M2,M3, 01-
				M5, 101	
M5	1	0	1	M2, 010	
M7	1	1	1		

Mantık İfadesi	2	3	5	7
$A'+C'$			X	X
$A+B'$	X	X		

$$F(A,B,C)=(A'+C')$$



$$F(A,B,C)=A'B'C'+A'B'C+ABC'+AB'C$$

Tablo Yöntemini kullanarak:

$$F(A,B,C)=\prod(2,3,5,7)$$

	A	B	C		
M2	0	1	0	M7, 111	M5,M7, 1-1
M3	0	1	1	M3, 011	M2,M3, 01-
				M5, 101	
M5	1	0	1	M2, 010	
M7	1	1	1		

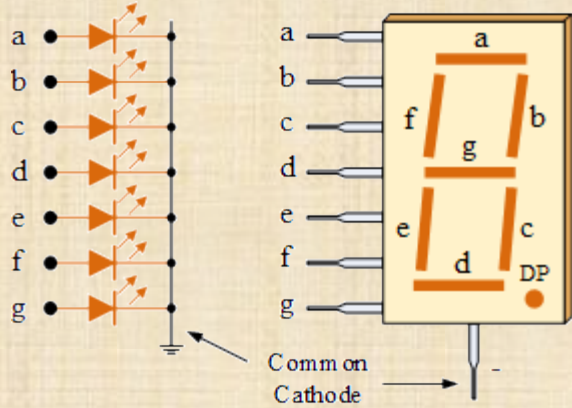
Mantık İfadesi	2	3	5	7
$A'+C'$			X	X
$A+B'$	X	X		

$$F(A,B,C)=(A'+C').(A+B')$$

### ÖNEMLİ

Bu sorunun Karno Haritaları ve Tablo Yöntemini kullanarak miniterim yaklaşımı ile çözümü ödevinizdir.

# Uygulama Ödevi



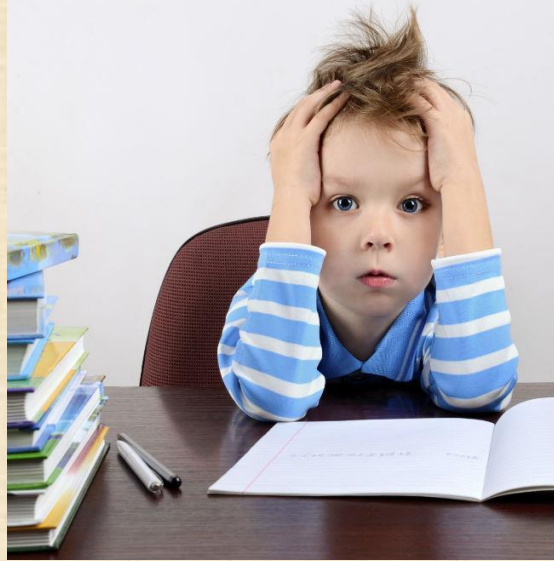
<http://www.himachal.co/seven-segment-display-schematic-symbol.html>

Yukarıda iç yapısı gösterilen ortak katotlu 7 segment displayde istenilen rakamların gösterilebilmesi için yan tarafta verilen doğruluk tablosunun kullanılabilir. Tabloda verilen  $F(A,B,C,D)$  mantık fonksiyonu için gerekli sadeleştirme işlemlerini yaptıktan sonra devrenin simülasyonunu gerçekleştiriniz.

No	A	B	C	D	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
3	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
4	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
5	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
7	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
8	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
9	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
A	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
b	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
C	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
d	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
E	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
F	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1

# Dersimiz Burada Bitmiştir

Bu haftaya yönelik çalışma sorularını çözmeyi unutmayın.



[Bu Fotoğraf](#), Bilinmeyen Yazar, [CC BY](#) altında lisanslanmıştır

Referans Kitap: Sayısal Tasarım M.Morris Mano