MATEMATİKSEL MODELLEME

Matematiksel Modelleme, Gazi Kitabevi

Nuri ÖZALP

Boyut Analizi

Boyut Analizi

İçerik

Boyut Analizi

Definition (Boyut analizi)

Kesin değişkenleri ile birlikte boyutsal doğruluğu olan bir denklemle tanımlanan bir olayın bir parçasından bilgi çıkarma yöntemi

Analiz sonucu, değişkenler azaltılarak, bir kısmi çözüm elde edilebilir. Deneyciler için önemli bir araçtır. Bilimsel nedenleme birçok nicelik kavramını temel alır. Örneğin, kuvvet, kütle, uzunluk, zaman, ivme, hız, sıcaklık, özgül ısı, elektrik yükü. Bu girdilerin her birine bir ölçü birimi karşılık gelmelidir. Kütle, zaman, uzunluk, sıcaklık, elektrik akımı, madde miktarı, parlaklık yoğunluğu verileri bir anlamda birbirinden bağımsız olup;

(i) ölçü birimleri uluslararası standartlarla belirlenmiştir ve

(ii) bunların özel birimleri diğer verilerin birimlerini de belirler.

Bununla birlikte yukarıdaki veriler için hiç bir şey temel değildir. Bunların seçimlerinde bir çok olasılık vardır. Kütle birimi yerine sık sık kuvvet birimi tanımlanır ve kütle birimi Newton yasasından belirlenerek, ölçü sistemi kuvvet sistemi olarak tanımlanır.

> *"Yedi tane bağımsız niceliğin olması"*

demek bile, niceliklerin ölçülüş şeklinde isteksel tanımlanmasının sonucudur. Örneğin, gazların kinetik teorisi;

> *"durgun bir gazın sıcaklığı, gazın tek bir molekülünün kinetik enerjisinin ortalamasına orantılıdır"*

der. Eğer, bir durgun gazın sıcaklığı gazın tek bir molekülünün kinetik enerjisi ortalamasına eşit olarak tanımlansaydı, bu durumda sıcaklık birimi açıkça kütle, uzunluk ve zaman birimleriyle tanımlanabilirdi.

Niceliklerin boyutları tanımlarından veya fiziksel yasalardan çıkarılır.

Example

Hız = zamana göre uzaklık(yol) değişimi olup, boyutu:

$$\frac{[L]}{[T]} = \left[\frac{L}{T}\right] = \left[LT^{-1}\right]$$

olur. Benzer şekilde *ivmenin boyutu*: $\left[LT^{-2}\right]$ dir. Kütle sisteminde; *kuvvet boyutu* (momentum değişimi):

$$\frac{[M]\left[LT^{-1}\right]}{[T]} = \left[MLT^{-2}\right]$$

dir. Kuvvet sisteminde; *kütle boyutu*:

$$\frac{[F]}{\left[LT^{-2}\right]} = \left[FL^{-1}T^{2}\right]$$

dir. $\int y(x)dx$ integralinin boyutu $[ydx]$ dir.

Definition

Sadece belli bir birim için geçerli olan katsayılar içeren bir formüle **empirik** formül denir. ☺

O halde, bir empirik formülde ölçü birimleri değiştirilirken dikkatli olmak gerekir.

Example

Bir beton boru içinde akan bir sıvının duvarlara yaptığı ortalama baskı τ (lb/ft^2), Amerikan mühendislik sisteminde

$$\tau = 0.0021\rho v^2 R^{-1/3}$$

empirik formülü ile veriliyor. Burada ρ (slag/ft^3) sıvının kütle yoğunluğu, v (ft/sn) sıvının ortalama hızı ve R (ft) de dik kesit alanının ıslak çevreye (hidrolik yarıçapa) oranıdır. Bu formülü τ (kg/m^2), ρ (kg-sn^2/m^4), v (m/sn) ve R (m) olmak üzere MKS kuvvet sistemine çeviriniz.

Çözüm Formül $\tau = 0.0021\rho v^2 R^{-1/3} \Longrightarrow$

$$[\tau] = [K]\,[\rho]\,\left[v^2\right]\left[R^{-1/3}\right]$$

formundadır. Kuvvet sisteminde

$$FL^{-2} = [K]\left[FT^2L^{-4}\right]\left[L^2T^{-2}\right]\left[L^{-1/3}\right] = [K]\left[FL^{-7/3}\right]$$

olup, böylece $[K] = \left[L^{1/3}\right]$ elde edilir. Diğer yandan $1\ ft = 0.3048\ m$ olduğundan

$$K = 0.0021\left[ft^{1/3}\right] = 0.0021\left[0.3048^{1/3}m^{1/3}\right] = 0.00141\left[m^{1/3}\right]$$

olur. Böylece MKS kuvvet sisteminde $\tau = 0.00141\rho v^2 R^{-1/3}$ bulunur. Dikkat edilirse, kuvvet sistemi yerine eğer kütle sistemini baz alsaydık bu durumda

$$\left[\frac{MLT^{-2}}{L^2}\right] = \left[ML^{-1}T^{-2}\right] = [K]\left[ML^{-3}\right]\left[L^2T^{-2}\right]\left[L^{-1/3}\right] = [K]\left[ML^{-4/3}T^{-2}\right.$$

olup, buradan tekrar $[K] = \left[L^{1/3}\right]$ elde edilir.

Boyutsal Homojenlik

Definition

Eğer bir denklemin formu temel ölçü birimlerine bağlı değilse, denkleme boyutsal homojendir denir. Diğer bir deyişle eğer bir denklemin bütün terimleri aynı boyuta sahipse, denkleme **boyutsal homojendir** denir.

Example

T peryodlu basit bir sarkacın peryodu (küçük salınımlar için)

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}$$

ile verilir ve birimlerinden bağımsız olup, denklem boyutsal homojendir. Eğer $g = 32.2\ ft/sn^2$ denklemde yerine yazılırsa, $T = 1.11\sqrt{l}$ elde edilir. Bu, dünyada FPS sisteminde doğru olup, artık boyutsal homojen değildir. Çünkü 1.11 çarpanı; uzunluk feet ve zaman saniye alınırsa doğrudur. Boyut analizi ile 1.11 çarpanının $[L^{-1/2}T]$ boyutuna sahip olduğu görülebilir. Bununla birlikte yanlış anlaşılmaya yol açmamak için sayılara boyut vermemekteyiz.

Bütün fiziksel kurallar boyutsal homojendir. Fiziksel yasalarla elde edilen bağıntılar da boyutsal homojendir.

Bir problemin boyut analizindeki ilk adım; içerilen fiziksel değişkenler ve sabitlerin listesine karar vermektir. Pratikte, değişkenler sabit olmakla birlikte (örneğin dünyada g), bunlar temel olup, diğer değişkenlerle boyutsuz çarpan oluşturmak için birleştirilirler. Bu nedenle değişkenlerin olayı niçin ve nasıl etkilediklerini iyi anlamak gerekir.

Example

M_1 ve M_2 kütleli, birbirinden r uzaklıkta bulunan iki cisim arasındaki çekim kuvveti F, Newton'un çekim yasasından

$$F = \frac{GM_1 M_2}{r^2}$$

(G evrensel sabit) olarak verilir. Kütle sisteminde

$$[MLT^{-2}] = [G][M][M]/[L^2]$$

olup, buradan

$$[G] = [M^{-1}L^3T^{-2}]$$

olur.

Buckingham Pi Teoremi

Theorem (Pi Teoremi)

"Eğer bir denklem boyutsal homojen ise, bu denklem boyutsuz çarpımların bir tam kümesinin bir bağıntısına indirgenir ve tersi de doğrudur." veya matematiksel deyişle; bir denklemin boyutsal homojen olması için gerek ve yeter koşul, f herhangi bir fonksiyon ve π_i $(i = 1, 2, 3, ...)$-ler de orjinal denklemde görünen değişken ve sabitlerin boyutsuz çarpımları ve/veya bölümleri olmak üzere, denklemin $f(\pi_1, \pi_2, ...) = 0$ formunda yazılabilmesidir.

π_i listesinde bütün boyutsuz çarpımların olması gerekmez. Diğerlerinin çarpımla ve/veya bölümle elde edilebildiği bir grup yeterlidir. Bu teorem boyut analizinin temel teoremidir. π_i çarpımlarının sayısı, denklemdeki fiziksel sabit ve değişken sayısını geçemez.

Example

Basınçsız akan bir sıvı içindeki D çaplı düzgün küresel bir cismi göz önüne alalım. Cisimden belli bir mesafedeki akıntının hızı V, sıvının kütle yoğunluğu ρ ve sıvının akışkanlık katsayısı μ olsun. Cisim üzerindeki F itme kuvveti ; V, D, ρ ve μ nün bir fonksiyonudur.

$$F^a V^b D^c \rho^d \mu^e$$

formunda, boyutsuz çarpımların bir formülünün oluşturulup oluşturulamayacağını inceleyelim.

Çözüm. Boyutsal homojenlikten;

$$\begin{aligned}[(MLT^{-2})^a][(LT^{-1})^b][(L)^c][(ML^{-3})^d][ML^{-1}T^{-1})^e] &= [M^0][L^0][T^0] \\ [M^{a+d+e}L^{a+b+c-3d-e}T^{-2a-b-e}] &= [M^0L^0T^0]\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} a+d+e=0 \\ a+b+c-3d-e=0 \\ -2a-b-e=0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a&=-d-e \\ b&=2d+e \\ c&=2d+e \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, iki parametreli bir çözüm kümesi

$$(a,b,c,d,e)=d(-1,2,2,1,0)+e(-1,1,1,0,1)$$

olur. Böylece bir tam kümede iki tane bağımsız boyutsuz çarpım vardır. $d=1$ ve $e=1$ keyfi seçimi ile,

$$\pi_1 = F^{-1}V^2D^2\rho^1\mu^0 \quad \text{ve} \quad \pi_2 = F^{-1}V^1D^1\rho^0\mu^1$$

Genel bir kural olarak

$$\begin{aligned} &\text{Bir tam kümenin bağımsız boyutsuz çarpım sayısı} \\ = \; &\text{Değişken sayısı} \; - \; \text{katsayılar matrisinin rankıdır.}\end{aligned}$$

Boyutsuz çarpımların sonsuz çoklukta farklı tam kümeleri vardır. Pi teoremi göz önüne alındığında, herhangi bir tam küme kabul edilebilirdir. Bununla birlikte, Buckingham (1914), bazı kümelerin pratikte diğerlerine göre daha kullanışlı olduğunu göstermiştir. O halde, akla gelen soru bir tam kümenin en iyi şekilde nasıl seçilebileceğidir. Buckingham, boyutsuz değişkenler üzerinde maksimum miktarda deneysel kontrol elde edilebildiğini göstermiştir: Eğer orjinal değişkenler herbiri sadece bir boyutsuz çarpımda olacak şekilde düzenlenirse, problemin bağımlı değişkeni de düşünülmek zorundadır ve **bağımlı boyutsuz değişken** diye adlandırılan bu değişken de birden fazla boyutsuz çarpımda yer almamalıdır.

Örneğimize geri dönersek

$$\pi_1 = F^{-1}V^2D^2\rho \quad \text{ve} \quad \pi_2 = F^{-1}VD\mu$$

olup, boyutsuz çarpımların (bir kuvveti, bir çarpımı veya) bir oranı da boyutsuz olacağından

$$\pi_3 = \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{VD\rho}{\mu} \text{ (**Reynold sayısı**)}$$

olur. $P = \frac{F}{\rho V^2 D^2} = \frac{1}{\pi_1}$ (**Basınç katsayısı**) alınırsa, Pi teoreminden $f(P, R) = 0$ ve buradan da g keyfi bir fonksiyon olmak üzere $\frac{F}{\rho V^2 D^2} = g(\frac{VD\rho}{\mu})$ elde edilir. Bir kürenin izdüşüm alanı $A = \frac{\pi D^2}{4}$ olup, böylece küredeki itme

$$\begin{aligned} F &= \rho V^2 D^2 g(R) = \rho V^2 \frac{4A}{\pi} g(R) = \frac{1}{2}[\frac{8}{\pi} g(R)]\rho V^2 A \\ &= \frac{1}{2} C_D \rho V^2 A \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $C_D = \frac{8}{\pi} g(R)$, **çekim katsayısı** olarak adlandırılır.

Example

Birbirinden r uzaklıkta, M_1 ve M_2 kütleli iki cisim arasındaki çekim kuvvetinin M_1, M_2, r ve G ye bağlı olduğu bilindiğine göre

$$G^a M_1^b M_2^c r^d F^e$$

şeklinde, boyutsuz çarpım formülü belirlenebilir mi?. Eğer bu yapılabiliyorsa, mümkün olduğunca fazla bağımsız çarpımlar bulunuz.

Çözüm. Boyutsal homojenlikten;

$$[(M^{-1}L^3T^{-2})^a][(M)^b][(M)^c][(L)^d][(MLT^{-2})^e] = [M^0][L^0][T^0]$$

olup, buradan

$$\left.\begin{array}{l} -a+b+c+e=0 \\ 3a+d+e=0 \\ -2a-2e=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c=2a-b \\ d=-2a \\ e=-a \end{array}$$

ve böylece iki parametreli bir çözüm kümesi

$$\begin{aligned} (a,b,c,d,e) &= (a,b,2a-b,-2a,-a) \\ &= a(1,0,2,-2,-1)+b(0,1,-1,0,0) \end{aligned}$$

olur. O halde, bağımsız boyutsuz çarpımların bir tam kümesi

$$\pi_1 = GM_2^2 r^{-2} F^{-1} \text{ ve } \pi_2 = M_1 M_2^{-1}$$

olarak bulunur. Pi teoreminden, herhangi boyutsal homojen bir denklem $f(\pi_1, \pi_2) = 0$ formundadır. (Örneğin Newton'un çekim yasası $\pi_1\pi_2 = 1$ olduğunu söyler.)

Boyutsuz Çarpımların Dönüşümleri

Akışkanlar mekaniğindeki en temel değişkenler: Kuvvet F, uzunluk L, hız V, kütle yoğunluğu ρ, akışkanlık dinamik katsayısı μ, yerçekimi ivmesi g, ses hızı c ve yüzey genliği σ dır. Önceki kısımdaki teknikle, bu değişkenlerin boyutsuz çarpımlarının bir tam kümesi;

Reynold sayısı : $\mathcal{R} = \dfrac{VL\rho}{\mu} = \dfrac{VL}{\upsilon}, \quad (\upsilon = \mu/\rho)$

Basınç katsayısı: $\mathcal{P} = \dfrac{F}{\rho V^2 L^2} = \dfrac{p}{\rho V^2}, \quad (p$ basınç$)$,

Froude sayısı: $\mathcal{F} = \dfrac{V^2}{Lg}$

Mach sayısı : $\mathcal{M} = \dfrac{V}{c}$

Weber sayısı : $\mathcal{W} = \dfrac{\rho V^2 L}{\sigma}$

olarak verilebilir. Verilen bir problemde, eğer, örneğin yüzey genliği σ önemsiz ise $\mathcal{W}$ alınmaz, eğer g etkisiz ise $\mathcal{F}$ alınmaz vesaire.

Önceki kısımda, değişkenlerin daha çok deneysel kontrolünü sağlamak için boyutsuz çarpımların dönüşümü ile ilgili Buckingham'ın önerisine dikkat çekilmişti. Bazen dönüşümler başka nedenlerle de istenmektedir. Örneğin, bir problemin boyut analizi yapıldıktan sonra, belli bir değişkenin olayda etkisinin az olduğuna karar verilebilir ve eğer bu değişken sadece bir tek bağımsız boyutsuz çarpımda bulunuyorsa, bu boyutsuz çarpım alınmayabilir. Fakat, eğer değişken birden çok boyutsuz çarpımda bulunuyorsa, açık olarak bu değişkenin bulunduğu tüm bağımsız çarpımları gözardı etmek yanlış olur. Böyle bir durumda bir başka boyutsuz çarpım kümesine geçmek gerekmektedir. Dönüşümler, ayrıca bazen sadece $\mathcal{R}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{W}$ gibi standart çarpımları elde etmek için istenilir.

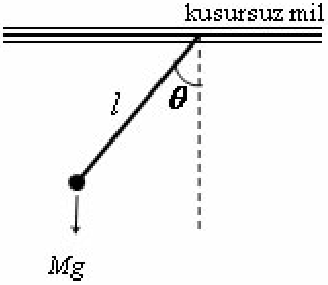
Example

f herhangi bir fonksiyon ve $\pi_1 = \rho F/\mu^2$, $\pi_2 = V(\rho/(\mu g))^{1/3}$, $\pi_3 = L(\rho^2 g/\mu^2)^{1/3}$ olmak üzere, $f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$ verilsin. μ yü gözardı etmek isteyelim. μ her çarpımda varolduğu için, μ yü içeren çarpımları yokedemeyiz. Fakat (π_1, π_2, π_3) çarpımlarından bir başka tam kümeyi şu şekilde elde edebiliriz:

$$\mathcal{P} = \frac{\pi_1}{\pi_2^2 \pi_3^2} = \frac{F}{\rho V^2 L^2}, \quad \mathcal{R} = \pi_2 \pi_3 = \frac{VL\rho}{\mu}, \quad \mathcal{F} = \frac{\pi_2^2}{\pi_3} = \frac{V^2}{Lg}.$$

Böylece, $f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$ denklemi, h ve H isteksel fonksiyonlar olmak üzere $h(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{F}) = 0$ veya $\mathcal{P} = H(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ şeklinde yazılabilir. Şimdi, eğer μ önemsiz ise $\mathcal{R}$ gözardı edilebilir.

Basit Salınım



Şekil: M kütleli ve ip uzunluğu l olan basit bir sarkaç (mil sürtünmesiz, ağırlıksız ip, hava direnci sıfır).

Basit bir sarkacın T peryodunu belirleyelim. T bağımlı (iç) değişkendir. Bağımsız (dış) değişkenler ise M, g, l ve θ dır. θ boyutsuz olmasına rağmen, boyutsuz çarpımların formülasyonuna onu da katmalıyız.

Şimdi boyutsuz ifadelerin

$$T^a M^b g^c l^d \theta^e$$

formunu göz önüne alalım. Boyut analizinden

$$[T^a][M^b][(LT^{-2})^c][L^d] = [M^0 L^0 T^0]$$

olup, buradan

$$\left.\begin{array}{l} b = 0 \\ c + d = 0 \\ a - 2c = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 2c \\ b = 0 \\ d = -c \end{array}$$

ve böylece iki parametreli bir çözüm kümesi

$$\begin{aligned} (a, b, c, d, e) &= (2c, 0, c, -c, e) \\ &= c(2, 0, 1, -1, 0) + e(0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece, iki bağımsız boyutsuz çarpım

$$\pi_1 = T^2 g l^{-1} \quad \text{ve } \pi_2 = \theta$$

olup, Pi teoreminden

$$f\left(T^2 g l^{-1}, \theta\right) = 0 \text{ veya } T^2 g l^{-1} = h(\theta)$$

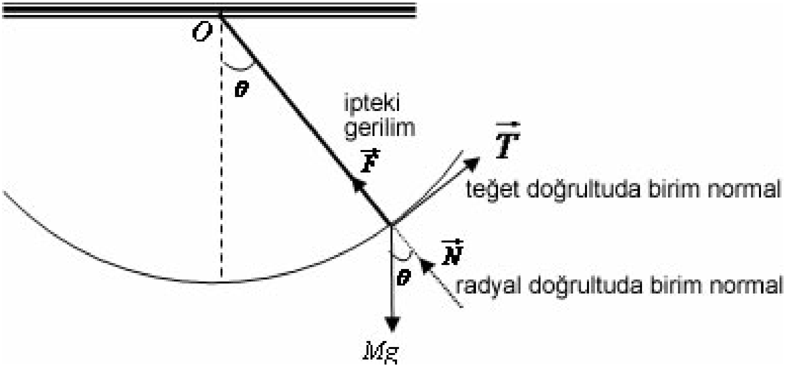
ve buradan da

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} H(\theta) \tag{1}$$

formülü elde edilir. Burada f ve g keyfi fonksiyonlar ve $H^2 = h$ dir.

Definitions

H nın tam formu boyut analizinden belirlenemez. H bir eliptik integral olup, yeterince küçük θ için yaklaşık olarak 2π dir. ☹



Şekil: $\theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = 0$ başlangıç koşullu basit sarkaç

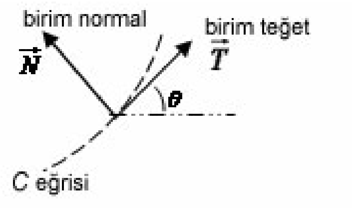
Fiziksel yaklaşımlar:

(i) İp l uzunluğunda, sıfır ağırlıklı ve bükülmez bir yapıda olsun.

(ii) Sarkaç ağırlığı, M kütlesinin bir parçası gibi düşünülsün.

(iii) Hava etkisi olmasın (havasız ortam), ve böylece mil sürtünmesiz olsun.

(iv) Sarkaç ağırlığı bir sabit dik yerçekimi olsun.



Şekil: Birim normal ve teğet vektörleri.

C eğrisi üzerindeki bir noktadaki $\vec{N}$ birim vektörü $\vec{T}$ birim teğet vektörüne dik vektördür ve $\vec{T} =< \cos\theta, \sin\theta >$,

$$\vec{N} =< \cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) >=< -\sin\theta, \cos\theta >= \frac{d\vec{T}}{d\theta}$$

olup, böylece $\frac{d\vec{T}}{d\theta} = \vec{N}$ ve

$$\frac{d\vec{N}}{d\theta} =< -\cos\theta, -\sin\theta >= - < \cos\theta, \sin\theta >= -\vec{T}$$

dir. Şimdi, (F, vektörün boyunu göstermek üzere) $\vec{F} = F\vec{N}$ olup, Newton'un ikinci yasası $(F = Ma)$ dan;

$$(F - Mg\cos\theta)\vec{N} - (Mg\sin\theta)\vec{T} = M\frac{d^2}{dt^2}(l(-\vec{N})) \qquad (2)$$

olur.

Sağ taraf

$$\begin{aligned} -Ml\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{N}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) &= -Ml\frac{d}{dt}\left(-\vec{T}\frac{d\theta}{dt}\right) = Ml\left[\frac{d\vec{T}}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \vec{T}\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] \\ &= Ml\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{N} + \frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{T}\right] \end{aligned}$$

dir. Böylece (2) denkleminden,

$$F - Mg\cos\theta = Ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{3}$$

ve

$$-Mg\sin\theta = Ml\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{yani}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{4}$$

elde edilir.

Eğer θ, (4) denkleminden belirlenebilirse, F de (3) denkleminden belirlenebilir. Şimdi (4) denklemini $\theta(0) = \theta_0$ ve $\dot{\theta}(0) = \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0} = 0$ başlangıç koşulları ile çözelim. $\dot{\theta} = p$ dersek, $\ddot{\theta} = \frac{dp}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = p\frac{dp}{d\theta}$ olup (4) denkleminde yazarsak

$$p\frac{dp}{d\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

elde ederiz. Bu denklem değişkenlerine ayrılabilir olup, integral alırsak

$$\frac{p^2}{2} = \frac{g}{l}\cos\theta + C_1$$

buluruz. $\dot{\theta}(0) = 0$ başlangıç koşulunu uygularsak

$$\frac{p^2}{2} = \frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

yani

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) \qquad (5)$$

elde ederiz ki bu sarkacın açısal hızını belirler.

$\dot{\theta}(t) \leq 0$ için (5) denkleminden

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{l}}\,(\cos\theta - \cos\theta_0)^{1/2}$$

veya

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_0)^{1/2}}$$

olup, buradan

$$\int_0^t d\tau = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\alpha}{(\cos\alpha - \cos\theta_0)^{1/2}}$$

ya da

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\theta}^{\theta_0}\frac{d\alpha}{(\cos\alpha - \cos\theta_0)^{1/2}}$$

bulunur. Bu genelleştirilmiş (eliptik) integral var olup, elemanter fonksiyonlar cinsinden hesaplanamaz fakat sayısal olarak hesaplanabilir.

Sarkacın $\theta = \theta_0$ dan $\theta = 0$ a kadar salınması için geçen süre

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\alpha}{(\cos\alpha - \cos\theta_0)^{1/2}}$$

dir. Bu değer, T sarkacın peryodu olmak üzere $T/4$ değerine eşit olduğundan

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\alpha}{(\cos\alpha - \cos\theta_0)^{1/2}}$$

olup, bu ise $T = H(\theta)\sqrt{l/g}$ ile verilen Denk. (1) formundadır.

Modeli (iii) yi örneğin

(iii)′ Sarkaç mil ve hava etkisindedir, ki bu durumda etkiye karşı oluşan kuvvet $-kl\frac{d\theta}{dt}\vec{T}$ (k sabit) dir,

kabulü ile değiştirerek geliştirebiliriz. Bu durumda Denk.(4),

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}\sin\theta - \frac{k}{M}\dot{\theta}(t) \tag{6}$$

formunu alır.

Bazen, karışık bir model fiziksel gerçekliliği olmayabileceğine rağmen, matematiksel olarak ilişkili olan daha basit bir modelle yer değiştirilebilir. Örneğin, eğer θ küçük ise $\sin\theta \doteqdot \theta$ olup, Denk.(4) yerine, çözümü daha kolay olan

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}\theta \tag{7}$$

denklemini kullanabiliriz ve yeni modelin (bazı amaçlar için) Denk.(4) ile verilen kadar iyi olmasını umarız. (7) denkleminden

$$p\frac{dP}{d\theta} = -\frac{g}{l}\theta \quad \Longrightarrow \quad pdp = -\frac{g}{l}\theta d\theta \quad \Longrightarrow \quad \frac{p^2}{2} = -\frac{g}{2l}\theta^2 + c_1$$

olup, $\theta(0) = \theta_0$ ve $\dot{\theta}(0) = 0$ başlangıç koşulları uygulanırsa

$$p^2 = \frac{g}{l}(\theta_0^2 - \theta^2)$$

elde edilir.

$\dot{\theta}(t) \leq 0$ için $\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{l}}(\theta_0^2 - \theta^2)^{1/2}$

$$\int_0^t d\tau = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\alpha}{\left(\theta_0^2 - \alpha^2\right)^{1/2}}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\arcsin(\frac{\alpha}{\theta_0}) \right) \Big|_{\theta}^{\theta_0} = \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\arcsin 1 - \arcsin(\frac{\theta}{\theta_0}) \right)$$

ve buradan

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\pi}{2} \qquad (\theta \doteq 0) \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

elde edilir. Eğer kendimizi sarkaç salınımının küçük açıda olmasına kısıtlarsak, (4) ve (7) denklemlerinin her ikisinin de gözlemlerde oldukça iyi oldukları görülmüştür. Aslında her iki tahmin de sarkacın sallanmaya başlamasından sonra asla durmayacağını söyler ki bu gerçeğe aykırıdır. Denk.(6) sarkacın gittikçe yavaşlayacağını tahmin eder ki bu gerçeğe daha yakındır.