MATEMATİKSEL MODELLEME

Matematiksel Modelleme, Gazi Kitabevi 2014

Nuri ÖZALP

GRAFİKSEL YÖNTEMLER

Grafiksel Yöntemler

İçerik

Grafikler

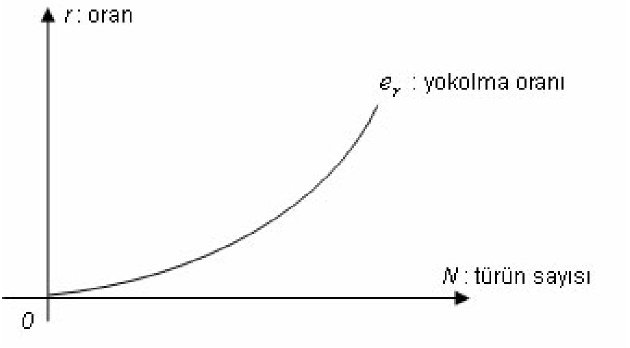
Grafikler, sadece birkaç değişken içeren sayısal ilişkilerin veya yaklaşık verilerin incelenmesinde kullanışlıdırlar. Bir probleme grafiksel yaklaşım, çok fazla bilginin olmadığı, veya bilginin duyarlı formlarda verilmediği durumlarda oldukça kullanışlı olmaktadır. Kuşkusuz çok duyarlı bilgilerin mevcut olduğu durumlarda analitik yöntemler daha uygundur.

En çok üç boyutlu bir düşünce yapımız olduğu için, üç değişkenden daha fazla değişken içeren bağıntılarda grafiksel yaklaşım doğrudan kullanışlı olmamaktadır. Bununla beraber, böyle durumlarda çoğunlukla bir çok değişkeni sabit gibi düşünüp, tek değişkeni değiştirerek grafiğin çizilip, bu değişkene bağlı değişimi incelemek mümkündür. Temel problemi aşağıdaki şekilde kurabiliriz:

"Belirli bazı bağımsız değişkenler değiştirildiğinde, bir sistemin denge noktası nasıl değişir?"

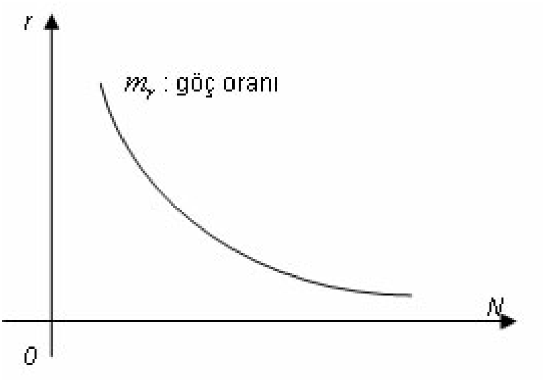
Türlerin çeşitliliği

Bağımlı değişkenimiz, adada bulunan türlerin toplam sayısı olsun. Hangi türlerin var olduğu ile ilgilenmiyoruz. Bağımsız değişkenler ise; adanın anakıtadan olan uzaklığı, adanın boyutu v.s. olsun. Adada bulunan türlerin çokluğu, verilen bir zamanda, en az bir türün yok olma olasılığının artması anlamına gelir. Böylece, yok olma oranı eğrisi pozitif bir eğime sahiptir.



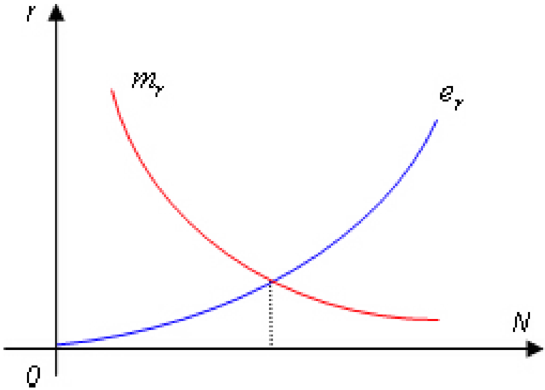
Şekil: Yokolma eğrisi.

Göç oranı, adada bulunmayan türlerle ilgilidir. Adadaki tür çokluğu, adaya göç eden türlerin az olmasını doğuracaktır. Böylece, adadaki türlerin artması demek, adaya yeni göç şansının azalması demektir. O halde göç eğrisi negatif eğime sahiptir.



Şekil: Göç eğrisi.

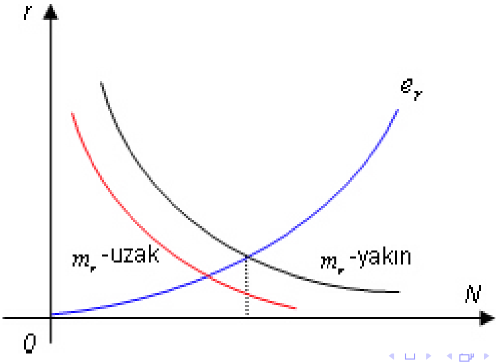
Göç ve yok olma oranlarının kesiştiği nokta denge noktasıdır.



Şekil: Denge noktası

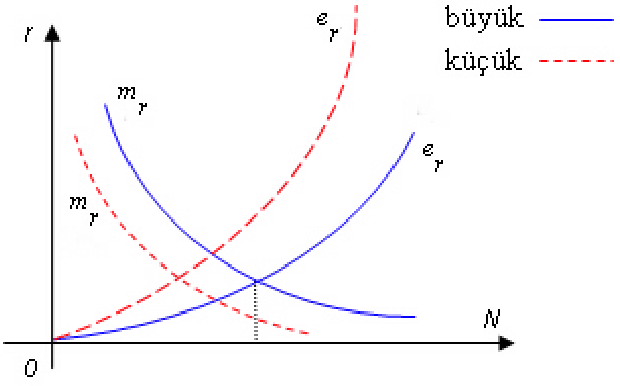
Uzaklık Etkisi:

Yok olma oranı sadece adaya ve adadaki türlere bağlıdır ve böylece adanın anakıtaya olan uzaklığından etkilenmez. Göç oranı m_r, adanın anakıtadan olan uzaklığına bağlıdır. m_r uzaklıkla azalır. Çünkü, herhangi bir türün adaya ulaşması zorlaşır. Denge yok olma oranı, uzak bir adaya oranla yakın bir ada için daha büyüktür. Böylece aynı büyüklükte iki ada için, adadaki türlerin çeşidi anakıtaya daha yakın olan adada daha hızlı değişir. Ayrıca türlerin sayısı da uzaklıkla azalır.



Ada Boyutu Etkisi

Herhangi bir türün küçük adada yok olma olasılığı daha fazladır, çünkü yer azlığı nüfusun az olmasına yol açar. Böylece, yok olma oranı eğrisi, ada küçüldükçe yukarı kaymaya başlar.



Şekil: Ada büyüklüğü etkisi.

Firma Üretimi

Basitlik için firmanın tek tip ürün ürettiğini kabul edelim. Belli bir zaman periyodunda, harcama ve fiyat değişiminin üretim üzerindeki etkisini öğrenmek istiyoruz.

$$\text{Kâr\_}P = \text{ Toplam gelir\_}I - \text{Toplam gider\_}C$$

olup, kabul edelim ki, P, I ve C üretilen parça sayısı x, in sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyonu olsun. Bunların türevleri sırası ile *marjinal kâr, marjinal gelir* ve *marjinal gider* olarak adlandırılır. Denge durumunda;

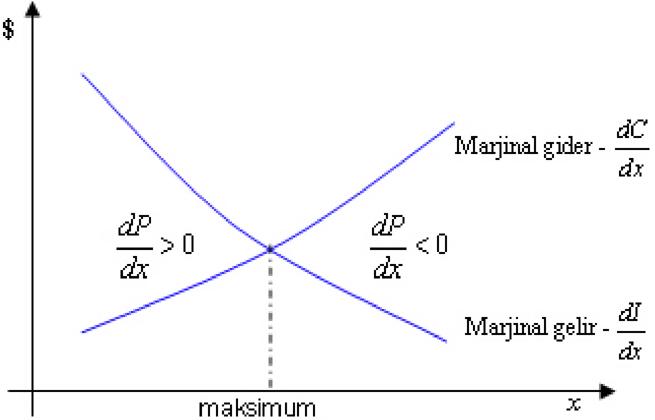
$$\frac{dP}{dx} = 0 \text{ yani } \frac{dI}{dx} = \frac{dC}{dx}$$

olur. Maksimum kâr için, eğer denge noktasından uzaklaşırsak kâr azalmalıdır. Matematiksel olarak denge noktasının solunda

$$\frac{dP}{dx} > 0 \text{ yani } \frac{dI}{dx} > \frac{dC}{dx}$$

ve sağında

$$\frac{dP}{dx} < 0 \text{ yani } \frac{dI}{dx} < \frac{dC}{dx}$$



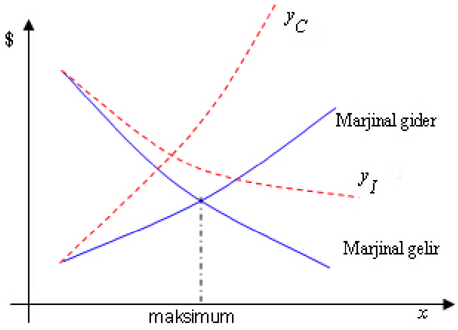
Şekil: Marjinal maliyet ve gelir eğrisi. Eksenler birim zamandaki üretim sayısı ve değeri göstermektedir.

x den bağımsız herhangi bir ek gider, örneğin emlak vergisi gibi, $y = dC/dx$ eğrisini ve böylece üretim düzeyini değiştirmeyecektir. Eğer firma ek olarak, örneğin gelir vergisi gibi, x e bağlı bir C_a giderine sahipse ve bu gider müşteriye yansıtılmıyorsa, $y = d(C + C_a)/dx$ eğrisi $y = dC/dx$ eğrisini eskisinin solunda kalan bir noktada kesecektir. Bunun anlamı üretim düzeyinde bir düşüş demektir. Diğer taraftan, eğer C_a müşteriye yüklenirse, bu durumda her iki marjinal eğri

$$y_I = \frac{d(I + C_a)}{dx} \quad \text{ve} \quad y_C = \frac{d(C + C_a)}{dx},$$

birim üretim vergisine eşit miktarda yukarı hareket eder ve böylece üretim düzeyi değişmez kalır.

Optimal üretim düzeyi marjinal giderin tersi doğrultusunda ve marjinal gelir ile aynı doğrultuda hareket eder. C_a, x in bir fonksiyonu olsun. y_I eğrisi y_C eğrisini eskisinin solunda bir noktada keser ve böylece üretim düzeyi azalmaya başlar. Fakat azalan üretim fiyatın yükselmesine ve müşteriye yansıtılmasına neden olabilir. Bu durumda marjinal gelir eğrisi yukarı kayar. Sonuç olarak üretim düzeyi yükselir. Fiyat yüksek olduğundan bu durumda talep azalabilir. Bunun anlamı ise, fiyat artışı üretimi orjinal düzeyine çekmeye tam olarak yeterli değildir.



Şekil: Optimal düzey üretim.

Silahlanma Yarışı

A ve *B* ülkeleri barış istemektedir. Saldırgan olmayacaklar fakat kendilerine yönelik bir saldırı durumunda da sessiz kalmayacaklardır. Böylece "**kendini korumaya**" inanmaktadırlar. Bu nedenle bir orduya sahiptirler ve silah biriktirme ve geliştirmeleri tamamen savunma amaçlıdır. *A* ülkesinin silahlanma hareketleri *B* ülkesinin gözünden kaçmaz. *A* ülkesinin liderleri sürekli olarak barışçıl amaçlı olduklarını söylemelerine rağmen, bu ülkenin silahları *B* ülkesini yok etmek için de kullanılabilir. Bu nedenle *B* ülkesi de sağlam bir savunma için silahlanır. *B* nin silah harcamaları *A* nın gözünden kaçmaz ve aynı nedenlerle *A* ülkesi savunma kuvvetlerini genişletir. Böylece (barışçıl) bir silahlanma döngüsü başlamış olur.

Basit model

A ve B ülkelerinin standart bir para birimine göre yıllık silahlanma harcamaları sırası ile x ve y olsun. Matematiksel olarak, a ve b pozitif sabitler olmak üzere,

$$\frac{dx}{dt} = ay \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = bx \tag{2}$$

dir. İki ülkenin başlangıç harcamaları

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \tag{3}$$

olsun. $x'(t) \geq 0$ ve $x''(t) = ay'(t) = abx \geq 0$ olup, $x = x(t)$ nin grafiğinin dış bükey olması demektir. Benzer bir sonuç $y(t)$ için de geçerlidir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay}$$

den

$$aydy = bxdx$$

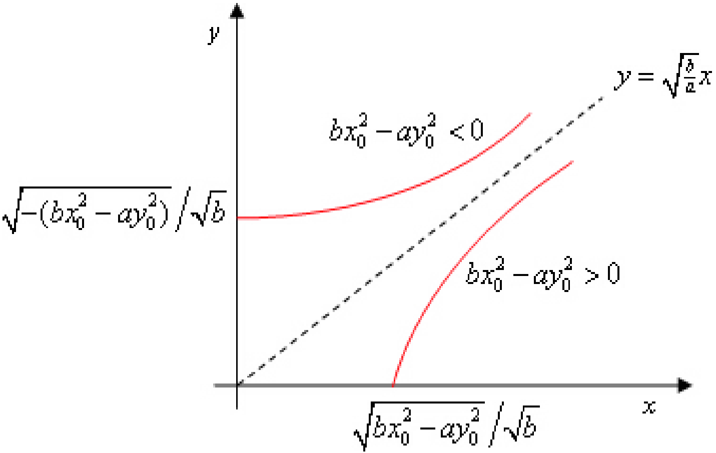
$\Longrightarrow$

$$bx^2 - ay^2 = c$$

Başlangıç koşulunu uygularsak, $c = bx_0^2 - ay_0^2$ olup, böylece $y = \sqrt{\frac{b}{a}}x$ asimptotlu

$$bx^2 - ay^2 = bx_0^2 - ay_0^2$$

hiperbolünü elde ederiz.



Şekil: Basit bir silahlanma yarışı.

Problemi Laplace dönüşümü kullanarak çözersek;

$$x(t) = x_0 \cosh \sqrt{ab}t + \sqrt{a/b}y_0 \sinh \sqrt{ab}t$$

$$y(t) = \sqrt{b/a}x_0 \sinh \sqrt{ab}t + y_0 \cosh \sqrt{ab}t$$

bulunur.

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$$

ve

$$\begin{aligned} bx^2 - ay^2 &= bx_0^2 \left(\cosh^2 \sqrt{ab}t - \sinh^2 \sqrt{ab}t\right) \\ &\quad + ay_0^2 \left(\sinh^2 \sqrt{ab}t - \cosh^2 \sqrt{ab}t\right) \\ &= bx_0^2 - ay_0^2 \end{aligned}$$

olduğu çözümden de görülebilir.

Geliştirilmiş model

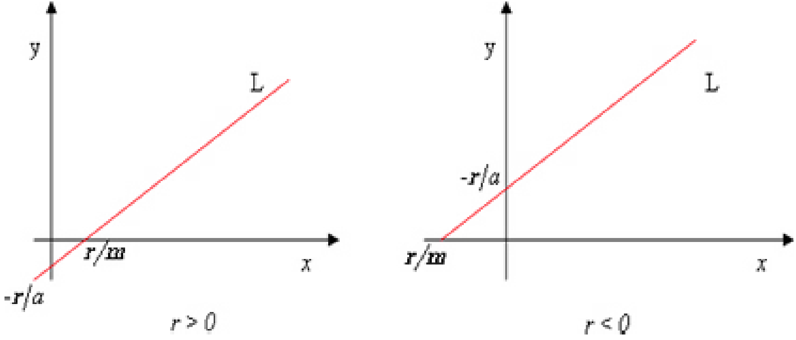
$$x'(t) = -mx + ay + r, \quad (4)$$
$$y'(t) = bx - ny + s \quad (5)$$

Burada, r ve s sabitler olup, $r > 0$ $(s > 0)$ ın anlamı $A(B)$ ülkesi, $B(A)$ ülkesine karşı düşmanlık besliyor demektir. $r < 0$ $(s < 0)$ ise bir iyi niyetin var olduğunu ve böylece silah bağımlılığının azaldığını gösterir.
Bu sistem aynı zamanda $(x, y)-$ düzleminde bir parçacığın hareket denklemi olarak da düşünülebilir. (4) ve (5), parçacığın sırası ile x ve y doğrultusundaki hızlarını verir. Böylece, $x'(t) \geq 0$ (≤ 0), parçacığın sağa (sola) doğru hareket etmesi demektir. Benzer şekilde $y'(t) \geq 0$ (≤ 0) da, parçacığın yukarı (aşağı) doğru hareket etmesi anlamına gelir. Sistemin çözmeksizin, silah harcamalarının sonuçta bir $x'(t) = 0 = y'(t)$ denge durumuna geleceğini görmek mümkün müdür?

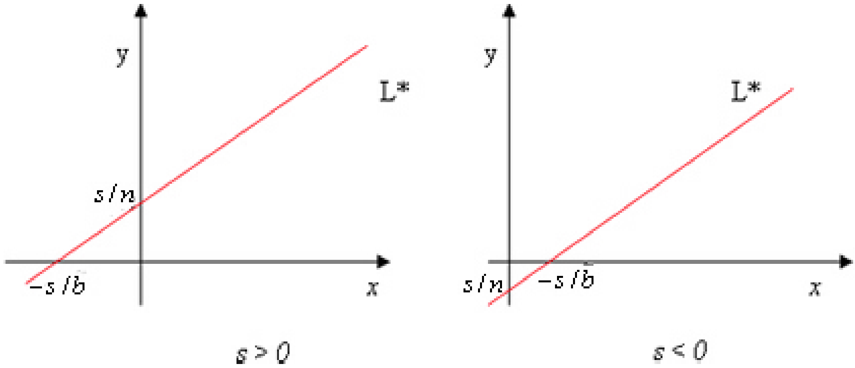
(4) ve (5) den

$$-mx + ay = -r \quad : \ L \text{ doğrusu} \tag{6}$$

$$bx - ny = -s \quad : \ L^* \text{ doğrusu} \tag{7}$$



Şekil: $L : y = \frac{m}{a}x - \frac{r}{a}$ doğrusu. L boyunca $\frac{dx}{dt} = 0$



Şekil: $L^* : y = \frac{b}{n}x + \frac{s}{n}$ doğrusu. L^* boyunca $\frac{dy}{dt} = 0$

Eğer herhangi bir zamanda A ve B ülkelerinin sırası ile x_1 ve y_1 harcamaları L doğrusu üzerinde ise, bu durumda $x'(t)|_{(x_1,y_1)} = 0$ olur. Fakat, $y'(t)|_{(x_1,y_1)} \neq 0$ olabilir. Böylece, bu zamanda, harcama düzeyi L üzerinde olmayan bir noktaya doğru aşağı veya yukarı doğru hareket edebilir. L doğrusuna A nın **optimal doğrusu** denir. A nın, harcamalarını optimal doğrusuna yaklaştırmak için sürekli değiştiği görülecektir. $t \longrightarrow \infty$ için üç olasılık vardır:

(i) Sonsuz silahlanma: $x \longrightarrow \infty, \quad y \longrightarrow \infty.$

(ii) Karşılıklı silahsızlanma: $x \longrightarrow 0, \quad y \longrightarrow 0.$

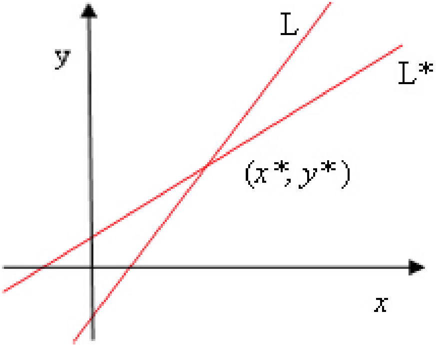
(iii) Dengeli silahlanma yarışı: $(x, y) \longrightarrow (x^*, y^*).$

Burada, (x^*, y^*) **denge noktası** olarak adlandırılıp, L ve L^* doğrularının kesim noktasıdır.

Eğer $mn - ab \neq 0$ ise (6)-(7) sistemini çözersek

$$x^* = \frac{nr + as}{mn - ab}, \qquad y^* = \frac{br + ms}{mn - ab}$$

elde ederiz.



Şekil: Denge noktası.

$(x_1, y_1) \notin L$ ve $(x_2, y_1) \in L$ olsun.

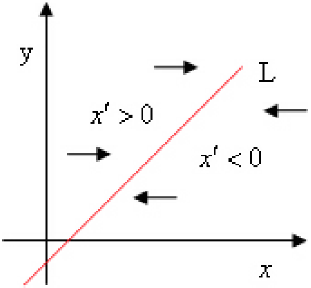
$$x'\big|_{(x_1,y_1)} = -mx_1 + ay_1 + r \quad (8)$$

$$0 = -mx_2 + ay_1 + r \quad (9)$$

olup, buradan

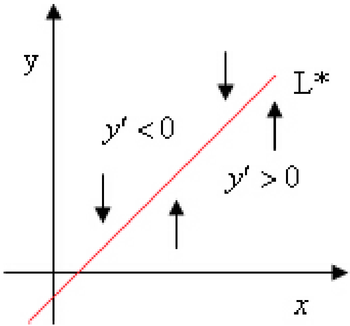
$$x'\big|_{(x_1,y_1)} = m(x_2 - x_1)$$

elde edilir. Böylece optimal doğru L nin üzerinde $x' > 0$ ve altında ise $x' < 0$ olup, A **harcamalarını optimal doğruya doğru ayarlar**.



Şekil: A harcamalarını L ye yaklaşacak şekilde ayarlar. L üzerinde $x' = 0$ dır.

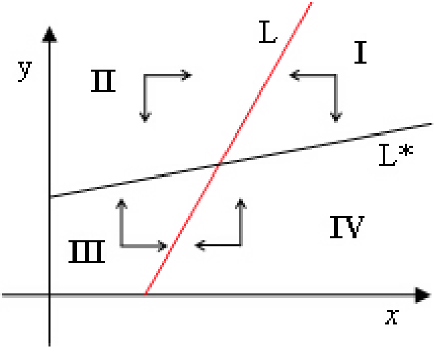
Benzer şekilde B harcamalarını optimal L^* doğrusuna doğru ayarlar.



Şekil: B harcamalarını L^* a yaklaşacak şekilde ayarlar. L^* üzerinde $y' = 0$ dır.

Durum 1. *Karşılıklı düşmanlık*: $r > 0, \quad s > 0.$
Eğer $mn - ab \neq 0$ ise denge noktası birinci veya üçüncü kuadranttadır.
$mn - ab > 0$ ise aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

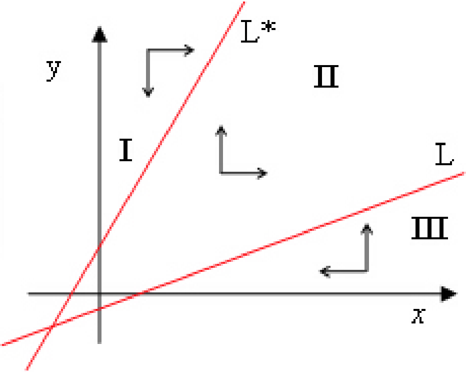
Bölge	dx/dt	dy/dt
I	<0	<0
II	>0	<0
III	>0	>0
IV	<0	>0



Şekil: Optimal doğru I. kuadrantı dört bölgeye ayırır. Oklar her bir bölgede düşey ve yatay doğrultudaki hareketi göstermektedir. Bu dengeli silahlanma durumudur.

$mn - ab < 0$ ise, $(x_0, \ y_0)$ nerede olursa olsun, sistemin hareketi harcamaları II. bölgeye taşır.

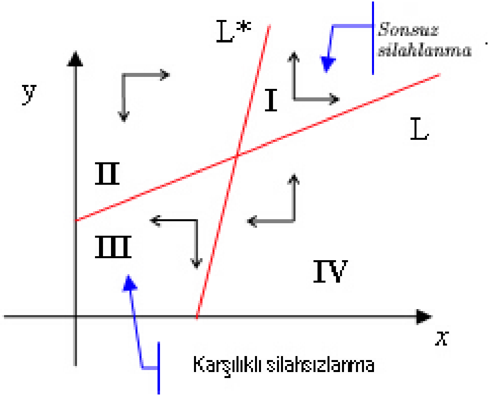
Bölge	dx/dt	dy/dt
I	>0	<0
II	>0	>0
III	<0	>0



Şekil: Sonsuz silahlanma. Düşmanlık terimleri $r > 0, s > 0$.

Durum 2. *İyi niyet*: $r < 0, \quad s < 0.$
Eğer $(x^*, \ y^*)$ birinci kuadrantta ise, $mn - ab < 0$ $(a, \ b, \ m, \ n > 0)$ dır .
Bu durumda aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

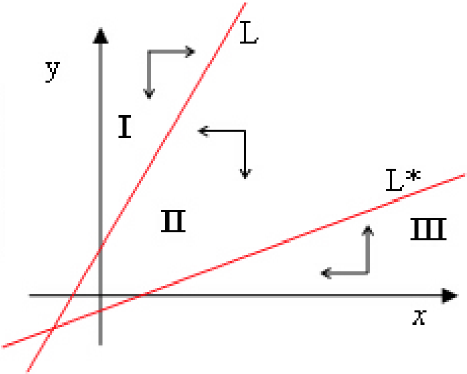
Bölge	dx/dt	dy/dt
I	>0	>0
II	>0	<0
III	<0	<0
IV	<0	>0



Şekil: Belirsiz durum. $mn - ab < 0$. Düşmanlık terimleri $s < 0, \ r < 0$. Başlangıç harcamaları önemli bir rol oynar.

Eğer $(x^*,\ y^*)$ üçüncü kuadrantta ise, başlangıç noktasından bağımsız olarak karşılıklı silahsızlanma oluşur.

Bölge	dx/dt	dy/dt
I	>0	<0
II	<0	<0
III	<0	>0



Şekil: Karşılıklı silahsızlanma. $mn - ab > 0$. $s < 0,\ r < 0$.

Bir belirsiz durum

Belirsiz durumun analizi için aşağıdaki örneği göz önüne alalım:

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y - 5 \quad (10)$$

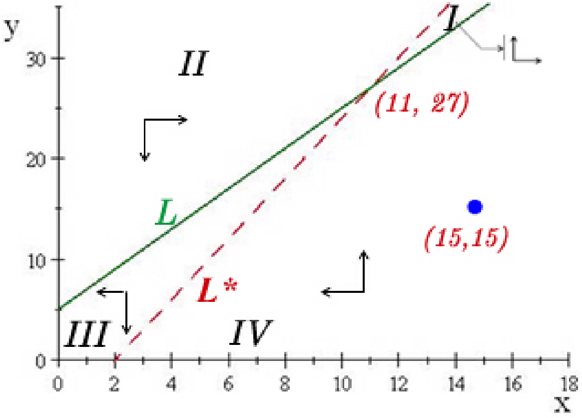
$$\frac{dy}{dt} = 6x - 2y - 12 \quad (11)$$

$(a = 1,\ m = 2,\ r = -5,\ b = 6,\ n = 2,\ s = -12)$, $r < 0$ ve $s < 0$ olduğundan ve $mn - ab = 4 - 6 < 0$ olduğundan, belirsiz durum oluşur. Optimal doğrular

$$L \quad : \quad -2x + y = 5$$

$$L^* \quad : \quad 6x - 2y = 12$$

olup, $(x^*,\ y^*) = (11, 27)$ denge noktasında kesişirler.



Şekil: Belirsiz durum

Başlangıç noktası $(x_0,\ y_0) = (15, 15)$ olsun. (10) ve (11) den $\frac{dx}{dt}\Big|_{(15,15)} < 0$ ve $\frac{dy}{dt}\Big|_{(15,15)} > 0$ dır. Türevlerin işaretleri başlangıç noktasının bulunduğu yeri belirler.$(15, 15)$ noktası IV. bölgede olup durum belirsizdir. Şimdi bir l doğrusunun eğimini bulalım öyle ki $(x, y) \in l$ olması için gerek ve yeter koşul (x, y) noktasındaki eğim, (x, y) den (x^*, y^*) noktasına olan doğrunun eğimine eşittir. Böylece

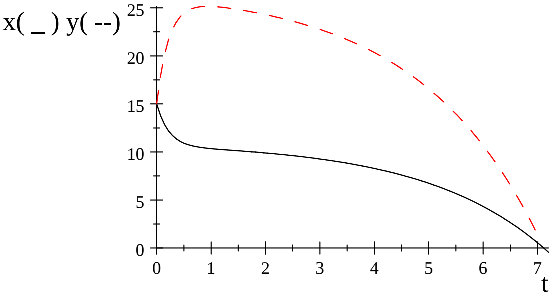
$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 2y - 12}{-2x + y - 5} = \frac{27 - y}{11 - x}$$

olur. Düzenleme yapılırsa

$$y^2 - 54y - 3(2x^2 - 44x - 1) = 0$$

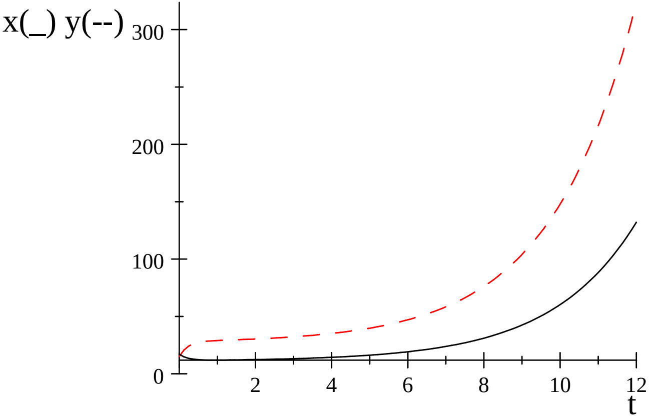
ve II. ve IV. bölgeden geçen doğru $y = 27 - \sqrt{6}(x - 11)$ bulunur.

$x = 15$ alırsak $y = -\ 15\sqrt{6} + 27 + 11\sqrt{6} \cong 17.20$ olup, böylece $(15, 15)$ noktası doğrunun altında kalır. O halde hareket doğrultusu denge noktasının altındadır. Son hareket, harcamaları III. bölgeye taşır ve sonuçta karşılıklı silahsızlanma oluşur.



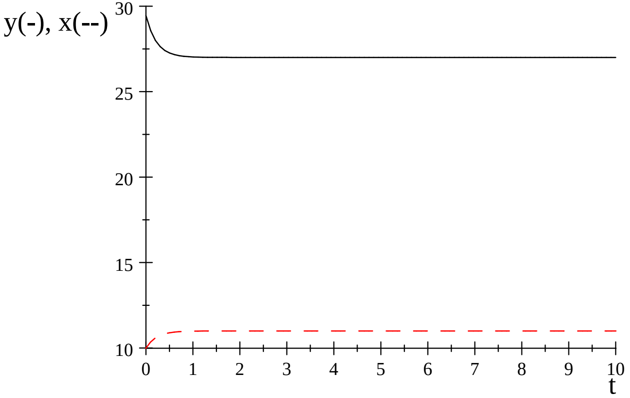
Şekil: Silahsızlanma. Başlangıç harcaması $x(0) = y(0) = 15$

$x = 17$ olsun. Bu durumda $y = 27 - 6\sqrt{6} \simeq 12.30$ olup, bu ise $(17, 15)$ noktasının doğrunun yukarısında kalması demektir. Böylece sonsuz silahlanma oluşur.



Şekil: Sonsuz silahlanma. Başlangıç harcaması $x(0) = 17$, $y(0) = 15$

$x = 10$ olsun. $y = 27 + \sqrt{6} \doteqdot 29.44948974$ olup, böylece başlangıç noktası doğru üzerindedir.



Şekil: Dengeli silahlanma. Başlangıç harcaması $x(0) = 10$, $y(0) \cong 29.45$

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -2x + y - 5 \\
\frac{dy}{dt} &= 6x - 2y - 12 \\
x(0) &= 15 = y(0)
\end{aligned}$$

sistemine Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$x(t) = 4e^{-2t}\cosh\sqrt{6}t - \frac{12}{\sqrt{6}}e^{-2t}\sinh\sqrt{6}t + 11$$

$$y(t) = -12e^{-2t}\cosh\sqrt{6}t + \frac{24}{\sqrt{6}}e^{-2t}\sinh\sqrt{6}t + 27$$

olup, $t \to \infty$ için $(x(t),\ \ y(t)) \to (0,0)$ olduğundan silahlanma harcamaları sonuçta sıfıra yaklaşır.

Birinci Dünya Savaşı

Şimdi (4) ve (5) ile verilen geliştirilmiş modeli göz önüne alalım ve Fransa-Rusya grubu ile Almanya - Avusturya-Macaristan grubunun karşılıklı korku ve yüksek bütçe harcama etkilerinin aynı olduğunu kabul edelim. Matematiksel model olarak,

$$\begin{aligned} x'(t) &= -mx + ay + r, \qquad (12) \\ y'(t) &= bx - ny + s \qquad (13) \end{aligned}$$

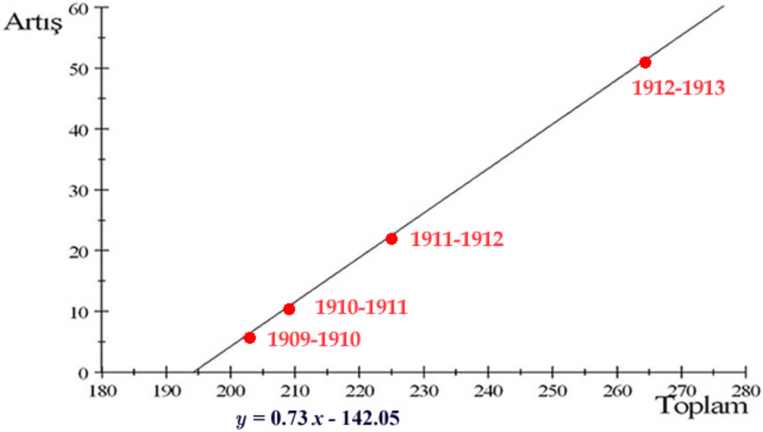
denklem sistemine sahibiz. (12)+(13) den,

$$\frac{d}{dt}(x+y) = (a-m)(x+y) + r + s \qquad (14)$$

elde edilir. Böylece toplam silahlanma harcamaları değişim oranı $\frac{d}{dt}(x+y)$ nin toplam silah harcamaları $x+y$ ye göre grafiğini çizersek bir doğru elde ederiz.

YIL	1909		1910		1911		1912		1913
Fransa	48.6		50.9		57.1		63.2		74.7
Rusya	66.7		68.5		70.7		81.8		92.9
Almanya	63.1		62.0		62.0		68.2		95.4
Avu.-Mac.	20.8		23.4		23.4		25.5		26.9
Toplam	199.2		204.8		214.9		238.7		289.9
Artış		5.6		10.1		23.8		50.3	
2 Yıllık Ort.		202.		209.8		226.8		263.8	

Tablo 1. Silahlanma Bütçeleri (milyon sterlin)



Şekil: Artış: $d(x+y)/dt$, Toplam: $(x+y)$

Yukarıdaki şekilden görülmektedir ki, dört nokta 0.73 eğimli bir doğruya yaklaşmaktadır. (14) den $a - m = 0.73$ olur. Eğer $m = 0.2$ ise $a = 0.93$ dür. $a = b$ ve $m = n$ olduğundan

$$mn - ab \cong 0.04 - 0.86 = -0.82 < 0$$

bulunur. Eğer, $r < 0$ ve $s < 0$ ise, bu durumda belirsiz durum oluşur.
Eğer, $r > 0$ ve $s > 0$ ise sonsuz silahlanma oluşur
Şekildeki doğru x-eksenini 194 noktasında kesmektedir. Böylece, eğer harcama düzeyi 194 milyon Sterlin olsa idi, bu durumda harcamalarda artış olmazdı. Fakat 1909 yılındaki toplam harcama 199.2 milyon Sterlin idi ve böylece silahlanma yarışının başlaması ve bunun sonucu olarak savaşın çıkması kaçınılmaz idi. Dikkat edilirse burada savaşa girecek olan diğer ülkelerin harcamaları göz önüne bile alınmamıştır.