MATEMATİKSEL MODELLEME

Matematiksel Modelleme, Gazi Kitabevi 2014

Nuri ÖZALP

GRAFİKSEL YÖNTEMLER

Grafiksel Yöntemler

İçerik

Silahlanma Yarışı

A ve B ülkeleri barış istemektedir. Saldırgan olmayacaklar fakat kendilerine yönelik bir saldırı durumunda da sessiz kalmayacaklardır. Böylece "**kendini korumaya**" inanmaktadırlar. Bu nedenle bir orduya sahiptirler ve silah biriktirme ve geliştirmeleri tamamen savunma amaçlıdır. A ülkesinin silahlanma hareketleri B ülkesinin gözünden kaçmaz. A ülkesinin liderleri sürekli olarak barışçıl amaçlı olduklarını söylemelerine rağmen, bu ülkenin silahları B ülkesini yok etmek için de kullanılabilir. Bu nedenle B ülkesi de sağlam bir savunma için silahlanır. B nin silah harcamaları A nın gözünden kaçmaz ve aynı nedenlerle A ülkesi savunma kuvvetlerini genişletir. Böylece (barışçıl) bir silahlanma döngüsü başlamış olur.

Basit model

A ve B ülkelerinin standart bir para birimine göre yıllık silahlanma harcamaları sırası ile x ve y olsun. Matematiksel olarak, a ve b pozitif sabitler olmak üzere,

$$\frac{dx}{dt} = ay \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = bx \tag{2}$$

dir. İki ülkenin başlangıç harcamaları

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \tag{3}$$

olsun. $x'(t) \geq 0$ ve $x''(t) = ay'(t) = abx \geq 0$ olup, $x = x(t)$ nin grafiğinin dış bükey olması demektir. Benzer bir sonuç $y(t)$ için de geçerlidir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay}$$

den

$$aydy = bxdx$$

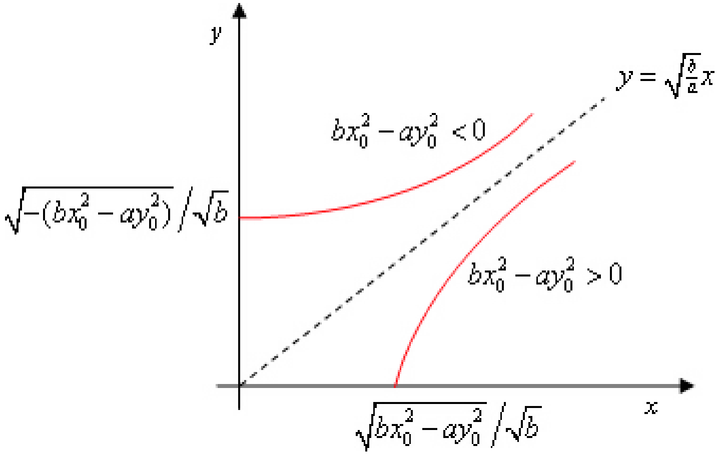
$\Longrightarrow$

$$bx^2 - ay^2 = c$$

Başlangıç koşulunu uygularsak, $c = bx_0^2 - ay_0^2$ olup, böylece $y = \sqrt{\frac{b}{a}}x$ asimptotlu

$$bx^2 - ay^2 = bx_0^2 - ay_0^2$$

hiperbolünü elde ederiz.



Şekil: Basit bir silahlanma yarışı.

Problemi Laplace dönüşümü kullanarak çözersek;

$$x(t) = x_0 \cosh \sqrt{ab}t + \sqrt{a/b}y_0 \sinh \sqrt{ab}t$$

$$y(t) = \sqrt{b/a}x_0 \sinh \sqrt{ab}t + y_0 \cosh \sqrt{ab}t$$

bulunur.

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$$

ve

$$\begin{aligned} bx^2 - ay^2 &= bx_0^2 \left(\cosh^2 \sqrt{ab}t - \sinh^2 \sqrt{ab}t\right) \\ &\quad + ay_0^2 \left(\sinh^2 \sqrt{ab}t - \cosh^2 \sqrt{ab}t\right) \\ &= bx_0^2 - ay_0^2 \end{aligned}$$

olduğu çözümden de görülebilir.

Geliştirilmiş model

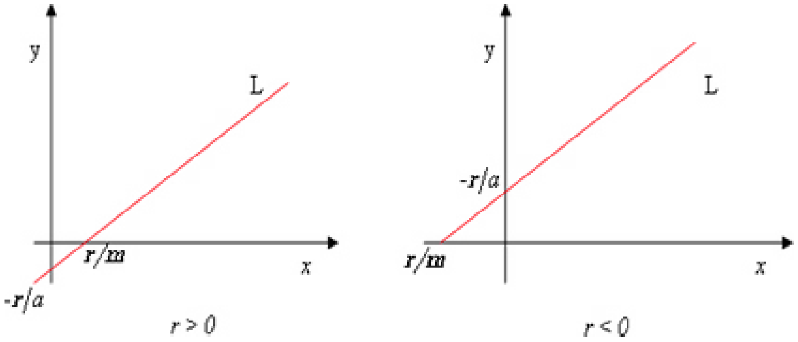
$$x'(t) = -mx + ay + r, \tag{4}$$
$$y'(t) = bx - ny + s \tag{5}$$

Burada, r ve s sabitler olup, $r > 0$ $(s > 0)$ ın anlamı $A(B)$ ülkesi, $B(A)$ ülkesine karşı düşmanlık besliyor demektir. $r < 0$ $(s < 0)$ ise bir iyi niyetin var olduğunu ve böylece silah bağımlılığının azaldığını gösterir.
Bu sistem aynı zamanda $(x, y)-$ düzleminde bir parçacığın hareket denklemi olarak da düşünülebilir. (4) ve (5), parçacığın sırası ile x ve y doğrultusundaki hızlarını verir. Böylece, $x'(t) \geq 0$ (≤ 0), parçacığın sağa (sola) doğru hareket etmesi demektir. Benzer şekilde $y'(t) \geq 0$ (≤ 0) da, parçacığın yukarı (aşağı) doğru hareket etmesi anlamına gelir. Sistemin çözmeksizin, silah harcamalarının sonuçta bir $x'(t) = 0 = y'(t)$ denge durumuna geleceğini görmek mümkün müdür?

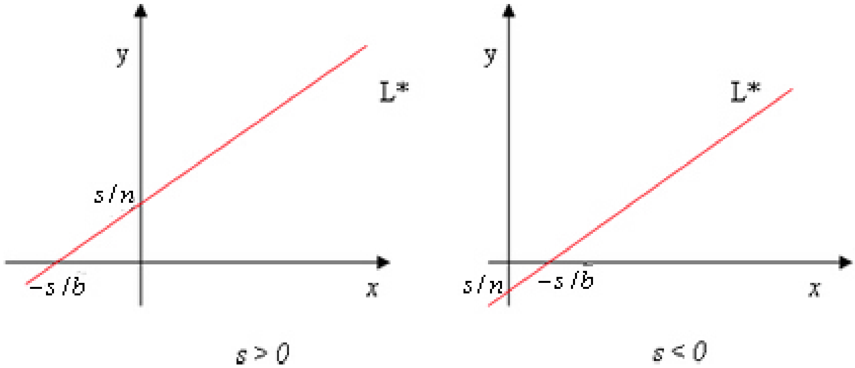
(4) ve (5) den

$$-mx + ay = -r \quad : \quad L \text{ doğrusu} \tag{6}$$

$$bx - ny = -s \quad : \quad L^* \text{ doğrusu} \tag{7}$$



Şekil: $L : y = \frac{m}{a}x - \frac{r}{a}$ doğrusu. L boyunca $\frac{dx}{dt} = 0$



Şekil: $L^* : y = \frac{b}{n}x + \frac{s}{n}$ doğrusu. L^* boyunca $\frac{dy}{dt} = 0$

Eğer herhangi bir zamanda A ve B ülkelerinin sırası ile x_1 ve y_1 harcamaları L doğrusu üzerinde ise, bu durumda $x'(t)|_{(x_1,y_1)} = 0$ olur. Fakat, $y'(t)|_{(x_1,y_1)} \neq 0$ olabilir. Böylece, bu zamanda, harcama düzeyi L üzerinde olmayan bir noktaya doğru aşağı veya yukarı doğru hareket edebilir. L doğrusuna A nın **optimal doğrusu** denir. A nın, harcamalarını optimal doğrusuna yaklaştırmak için sürekli değiştiği görülecektir. $t \longrightarrow \infty$ için üç olasılık vardır:

(i) Sonsuz silahlanma: $x \longrightarrow \infty, \quad y \longrightarrow \infty.$

(ii) Karşılıklı silahsızlanma: $x \longrightarrow 0, \quad y \longrightarrow 0.$

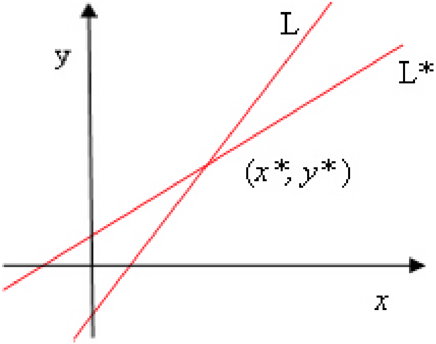
(iii) Dengeli silahlanma yarışı: $(x, y) \longrightarrow (x^*, y^*).$

Burada, (x^*, y^*) **denge noktası** olarak adlandırılıp, L ve L^* doğrularının kesim noktasıdır.

Eğer $mn - ab \neq 0$ ise (6)-(7) sistemini çözersek

$$x^* = \frac{nr + as}{mn - ab}, \qquad y^* = \frac{br + ms}{mn - ab}$$

elde ederiz.



Şekil: Denge noktası.

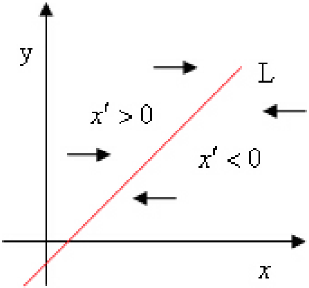
$(x_1, y_1) \notin L$ ve $(x_2, y_1) \in L$ olsun.

$$x'\big|_{(x_1,y_1)} = -mx_1 + ay_1 + r \qquad (8)$$
$$0 = -mx_2 + ay_1 + r \qquad (9)$$

olup, buradan

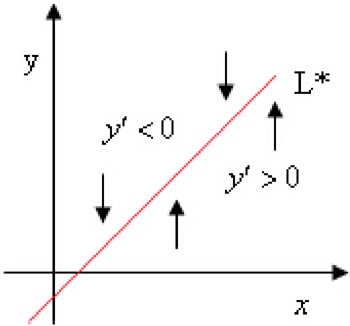
$$x'\big|_{(x_1,y_1)} = m(x_2 - x_1)$$

elde edilir. Böylece optimal doğru L nin üzerinde $x' > 0$ ve altında ise $x' < 0$ olup, A **harcamalarını optimal doğruya doğru ayarlar**.



Şekil: A harcamalarını L ye yaklaşacak şekilde ayarlar. L üzerinde $x' = 0$ dır.

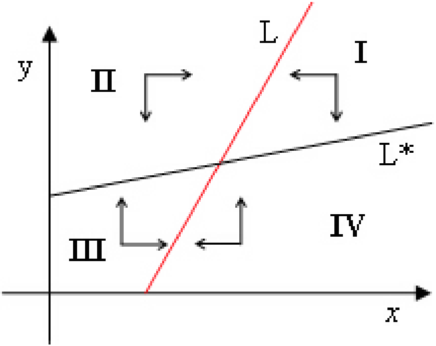
Benzer şekilde B harcamalarını optimal L^* doğrusuna doğru ayarlar.



Şekil: B harcamalarını L^* a yaklaşacak şekilde ayarlar. L^* üzerinde $y' = 0$ dır.

Durum 1. *Karşılıklı düşmanlık*: $r > 0, \quad s > 0.$
Eğer $mn - ab \neq 0$ ise denge noktası birinci veya üçüncü kuadranttadır. $mn - ab > 0$ ise aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

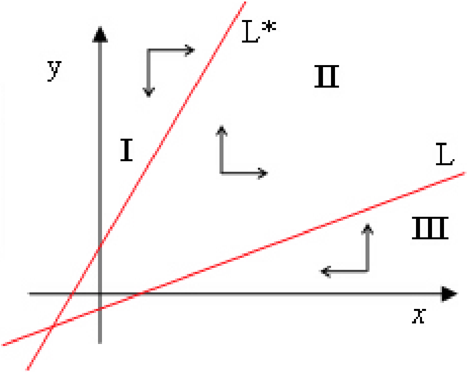
Bölge	$dx\,/\,dt$	$dy\,/\,dt$
I	<0	<0
II	>0	<0
III	>0	>0
IV	<0	>0



Şekil: Optimal doğru I. kuadrantı dört bölgeye ayırır. Oklar her bir bölgede düşey ve yatay doğrultudaki hareketi göstermektedir. Bu dengeli silahlanma durumudur.

$mn - ab < 0$ ise, $(x_0,\ y_0)$ nerede olursa olsun, sistemin hareketi harcamaları II. bölgeye taşır.

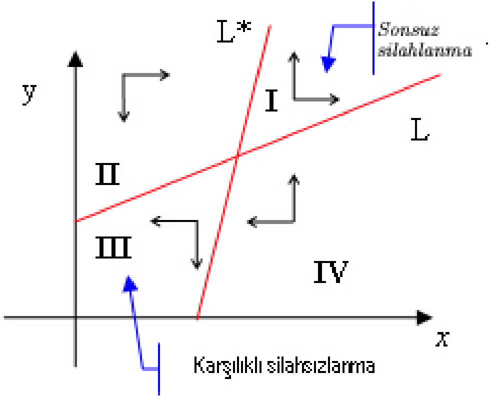
Bölge	dx/dt	dy/dt
I	>0	<0
II	>0	>0
III	<0	>0



Şekil: Sonsuz silahlanma. Düşmanlık terimleri $r > 0, s > 0$.

Durum 2. *İyi niyet*: $r < 0, \quad s < 0.$
Eğer $(x^*,\ y^*)$ birinci kuadrantta ise, $mn - ab < 0$ $(a,\ b,\ m,\ n > 0)$ dır .
Bu durumda aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

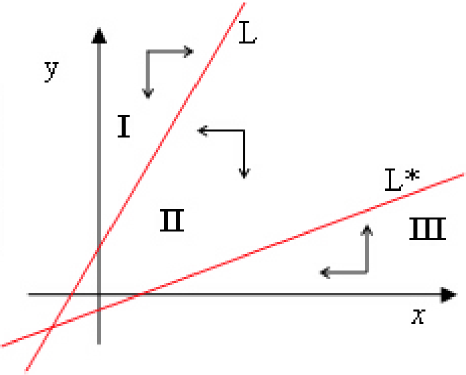
Bölge	dx/dt	dy/dt
I	>0	>0
II	>0	<0
III	<0	<0
IV	<0	>0



Şekil: Belirsiz durum. $mn - ab < 0$. Düşmanlık terimleri $s < 0,\ \ r < 0$. Başlangıç harcamaları önemli bir rol oynar.

Eğer $(x^*,\ y^*)$ üçüncü kuadrantta ise, başlangıç noktasından bağımsız olarak karşılıklı silahsızlanma oluşur.

Bölge	dx/dt	dy/dt
I	>0	<0
II	<0	<0
III	<0	>0



Şekil: Karşılıklı silahsızlanma. $mn - ab > 0$. $s < 0,\ r < 0$.

Bir belirsiz durum

Belirsiz durumun analizi için aşağıdaki örneği göz önüne alalım:

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y - 5 \tag{10}$$

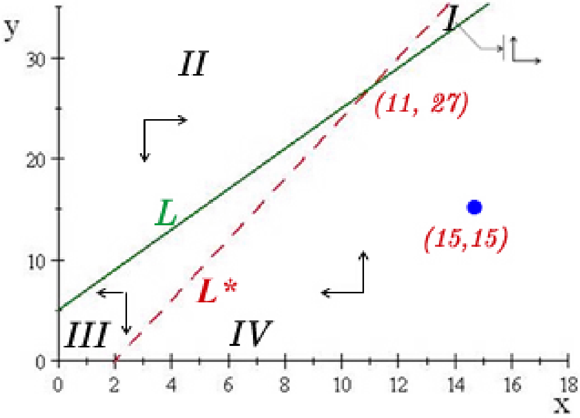
$$\frac{dy}{dt} = 6x - 2y - 12 \tag{11}$$

$(a = 1,\ m = 2,\ r = -5,\ b = 6,\ n = 2,\ s = -12)$, $r < 0$ ve $s < 0$ olduğundan ve $mn - ab = 4 - 6 < 0$ olduğundan, belirsiz durum oluşur. Optimal doğrular

$$L \quad : \quad -2x + y = 5$$

$$L^* \quad : \quad 6x - 2y = 12$$

olup, $(x^*,\ y^*) = (11, 27)$ denge noktasında kesişirler.



Şekil: Belirsiz durum

Başlangıç noktası $(x_0, \ y_0) = (15, 15)$ olsun. (10) ve (11) den $\frac{dx}{dt}\Big|_{(15,15)} < 0$ ve $\frac{dy}{dt}\Big|_{(15,15)} > 0$ dır. Türevlerin işaretleri başlangıç noktasının bulunduğu yeri belirler. $(15, 15)$ noktası IV. bölgede olup durum belirsizdir. Şimdi bir l doğrusunun eğimini bulalım öyle ki $(x, y) \in l$ olması için gerek ve yeter koşul (x, y) noktasındaki eğim, (x, y) den (x^*, y^*) noktasına olan doğrunun eğimine eşittir. Böylece

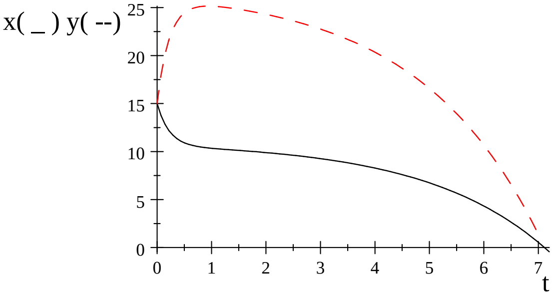
$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 2y - 12}{-2x + y - 5} = \frac{27 - y}{11 - x}$$

olur. Düzenleme yapılırsa

$$y^2 - 54y - 3(2x^2 - 44x - 1) = 0$$

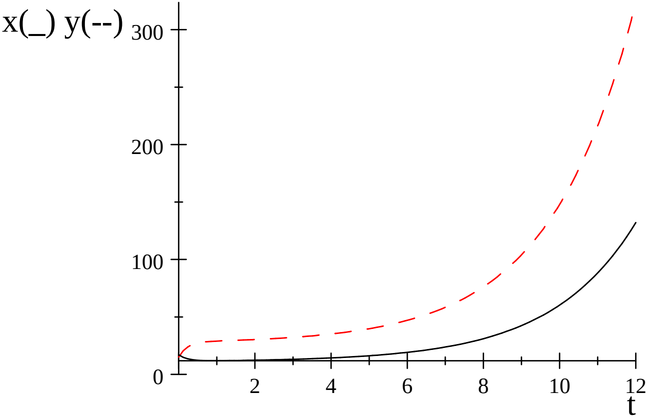
ve II. ve IV. bölgeden geçen doğru $y = 27 - \sqrt{6}(x - 11)$ bulunur.

$x = 15$ alırsak $y = -\ 15\sqrt{6} + 27 + 11\sqrt{6} \cong 17.20$ olup, böylece $(15, 15)$ noktası doğrunun altında kalır. O halde hareket doğrultusu denge noktasının altındadır. Son hareket, harcamaları **III**. bölgeye taşır ve sonuçta karşılıklı silahsızlanma oluşur.



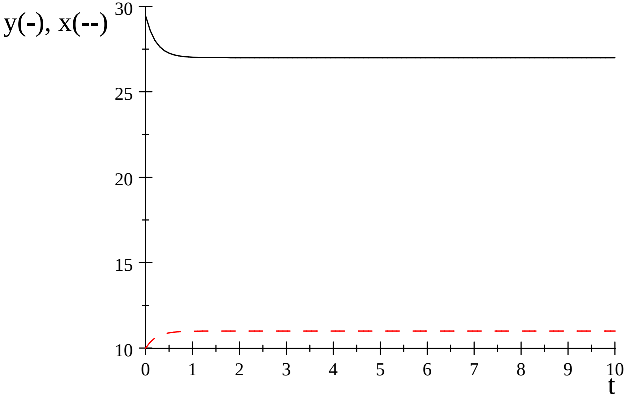
Şekil: Silahsızlanma. Başlangıç harcaması $x(0) = y(0) = 15$

$x = 17$ olsun. Bu durumda $y = 27 - 6\sqrt{6} \simeq 12.30$ olup, bu ise $(17, 15)$ noktasının doğrunun yukarısında kalması demektir. Böylece sonsuz silahlanma oluşur.



Şekil: Sonsuz silahlanma. Başlangıç harcaması $x(0) = 17$, $y(0) = 15$

$x = 10$ olsun. $y = 27 + \sqrt{6} \doteqdot 29.44948974$ olup, böylece başlangıç noktası doğru üzerindedir.



Şekil: Dengeli silahlanma. Başlangıç harcaması $x(0) = 10$, $y(0) \cong 29.45$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -2x + y - 5 \\ \frac{dy}{dt} &= 6x - 2y - 12 \\ x(0) &= 15 = y(0)\end{aligned}$$

sistemine Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$x(t) = 4e^{-2t}\cosh\sqrt{6}t - \frac{12}{\sqrt{6}}e^{-2t}\sinh\sqrt{6}t + 11$$

$$y(t) = -12e^{-2t}\cosh\sqrt{6}t + \frac{24}{\sqrt{6}}e^{-2t}\sinh\sqrt{6}t + 27$$

olup, $t \to \infty$ için $(x(t),\ \ y(t)) \to (0,0)$ olduğundan silahlanma harcamaları sonuçta sıfıra yaklaşır.

Birinci Dünya Savaşı

Şimdi (4) ve (5) ile verilen geliştirilmiş modeli göz önüne alalım ve Fransa-Rusya grubu ile Almanya - Avusturya-Macaristan grubunun karşılıklı korku ve yüksek bütçe harcama etkilerinin aynı olduğunu kabul edelim. Matematiksel model olarak,

$$x'(t) = -mx + ay + r, \tag{12}$$
$$y'(t) = bx - ny + s \tag{13}$$

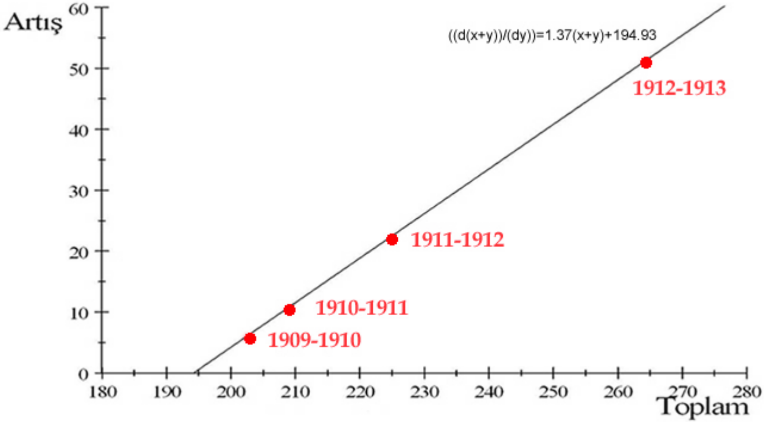
denklem sistemine sahibiz. (12)+(13) den,

$$\frac{d}{dt}(x+y) = (a-m)(x+y) + r + s \tag{14}$$

elde edilir. Böylece toplam silahlanma harcamaları değişim oranı $\frac{d}{dt}(x+y)$ nin toplam silah harcamaları $x+y$ ye göre grafiğini çizersek bir doğru elde ederiz.

YIL	1909	1910	1911	1912	1913
Fransa	48.6	50.9	57.1	63.2	74.7
Rusya	66.7	68.5	70.7	81.8	92.9
Almanya	63.1	62.0	62.0	68.2	95.4
Avu.-Mac.	20.8	23.4	23.4	25.5	26.9
Toplam	199.2	204.8	214.9	238.7	289.9
Artış		5.6	10.1	23.8	50.3
2 Yıllık Ort.		202.	209.8	226.8	263.8

Tablo 1. Silahlanma Bütçeleri (milyon sterlin)



Şekil: Artış: $d(x+y)/dt$, Toplam: $(x+y)$

Yukarıdaki şekilden görülmektedir ki, dört nokta 0.73 eğimli bir doğruya yaklaşmaktadır. (14) den $a - m = 0.73$ olur. Eğer $m = 0.2$ ise $a = 0.93$ dür. $a = b$ ve $m = n$ olduğundan

$$mn - ab \cong 0.04 - 0.86 = -0.82 < 0$$

bulunur. Eğer, $r < 0$ ve $s < 0$ ise, bu durumda belirsiz durum oluşur.
Eğer, $r > 0$ ve $s > 0$ ise sonsuz silahlanma oluşur
Şekildeki doğru x-eksenini 194 noktasında kesmektedir. Böylece, eğer harcama düzeyi 194 milyon Sterlin olsa idi, bu durumda harcamalarda artış olmazdı. Fakat 1909 yılındaki toplam harcama 199.2 milyon Sterlin idi ve böylece silahlanma yarışının başlaması ve bunun sonucu olarak savaşın çıkması kaçınılmaz idi. Dikkat edilirse burada savaşa girecek olan diğer ülkelerin harcamaları göz önüne bile alınmamıştır.