

MATEMATİKSEL BİYOLOJİ

Matematiksel Modelleme, Gazi Kitabevi 2014

Nuri ÖZALP

Nüfus Dinamiği ve Kararlılık



Nüfus Dinamiği ve Kararlılık

İçerik

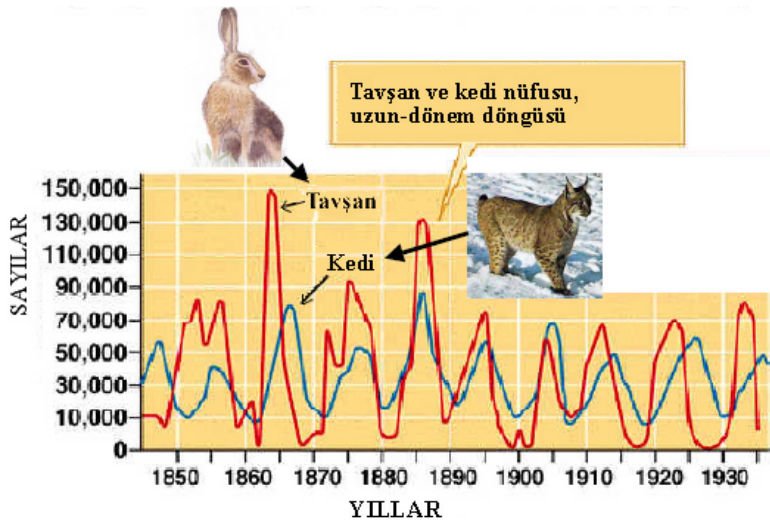
- 1 Kararlılık Tanımı ve Teoremi
- 2 Tek Tür Modeli
- 3 İki Tür Modeli
- 4 Kararlılık
- 5 Faz Düzlemi-Orbit-Yörünge
- 6 Yarışma Modeli
- 7 Av Avcı Modeli
- 8 Karmaşa (Kaos)



Av-Avcı Modeli

- Aynı çevreyi paylaşan iki veya daha çok biyolojik nüfus arasındaki etkileşim: **av-avcı**
- Avcılar avları yiyerek karnını doyurur. Avlar ise çevrede mevcut bulunan daha başka yiyeceklerle karnını doyurur:
- Vaşak - tavşan: tavşanlar ormanda belirli bitkileri yerken, vaşaklar tavşanları yer.
- İlk deneysel çalışma Kanada'da Hudson Bay firmasının vaşak ve tavşan nüfusunu incelemesi:
 - Firma, vaşak ve tavşan nüfusunu ölçmek için tuzak kurarak, tuzağa yakalananların yıllık sayılarını kaydetmiştir. Veriler, ilginç bir şekilde, nüfusta bir periyodik değişimin olduğunu göstermiştir.





Şekil: Kanada'da vahşi kedi ve tavşan nüfuslarında gözlemlenen salınımlar. (Veriler E.P. Odum'un Fundamentals of Ecology, 1953 kitabından alınmıştır)



Klasik av-avcı matematiksel modeli, İtalyan Matematikçi **Vito Volterra** (1860 – 1940) tarafından geliştirilmiştir (1920 li yıllarda, Adriyatik Denizinde, köpek balığı ve yedikleri balık nüfusunda gözlenen döngüsel değişimlerin analizi).

Türler arasındaki ilişkiyi göz ardı edelim.

F = belli bir balık türünün sayısı,

S = köpekbalığı sayısı

Bölgeyi dışa göç olmayacak, veya göç önemsiz olacak, şekilde sınırlı kabul edelim. Balıklar plankton yediklerinden, köpekbalıklarını gözardı ederek, balıkların nüfus artış oranını sabit kabul edebiliriz. Böylece,

$$\frac{dF}{dt} = aF$$

olur. Eğer, nüfus yeterince büyük bir noktaya gelirse, lojistik büyüme modeli

$$\frac{dF}{dt} = aF - bF^2,$$

(taşıma kapasitesi a/b) önerilebilir.



Köpekbalıklarının büyüme oranının yemleri olan balıkların sayısı ile orantılı arttığını kabul edelim. Yani,

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = -k + \lambda F$$

olsun. Böylece balıkların çoğalma oranı, köpekbalıklarının nüfusu ile orantılı olur. Yani,

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dt} = a - bF - cS$$

dir. Böylece av-avcı türleri için, 1920 li yıllarda birbirlerinden bağımsız olarak Lotka ve Volterra' nın çalıştığı,

$$\frac{dF}{dt} = (a - bF - cS)F \quad (1)$$

$$\frac{dS}{dt} = (-k + \lambda F)S, \quad (2)$$

Lotka-Volterra sistemini elde ederiz. Burada, a , b , c , k ve λ pozitif sabitlerdir.



Sonsuz plankton kaynağı olduğu varsayılırsa, $b = 0$ olur. Bu model tek av-avcı modeli değildir fakat en basit olanlardan biridir. Şimdi, (1) denkleminde $b = 0$ kabul edelim. Böylece,

$$\frac{dF}{dt} = (a - cS)F \quad (3)$$

olur. Buradan,

$$S \text{ nin } \begin{cases} > a/c \\ = a/c \\ < a/c \end{cases} \text{ olması, balık nüfusunun } \begin{cases} \text{yok olması} \\ \text{değişmemesi} \\ \text{artması} \end{cases} \text{ demektir.}$$

Benzer şekilde, (2) denklemden

$$F \text{ nin } \begin{cases} > k/\lambda \\ = k/\lambda \\ < k/\lambda \end{cases} \text{ olması, köpekbalığı nüfusunun } \begin{cases} \text{artması} \\ \text{değişmemesi} \\ \text{yok olması} \end{cases} \text{ demektir.}$$



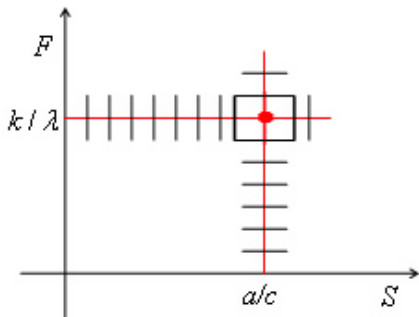
Başlangıçta çok az sayıda köpekbalığı olduğunu varsayalım. (3) denkleminde göre balık sayısı artar. Balık sayısı artarken (2) denkleminde köpekbalığı sayısı artar. Köpekbalığı sayısı yeterince büyük olursa, balıkların büyüme oranı negatif olur. Bu durumda balık sayısı azalır ve bu döngü devam eder.

Genel olarak (2)-(3) sisteminin t ye göre elemanter fonksiyonlar cinsinden elde edilebilen açık bir çözümü yoktur. O halde

$$\frac{dF}{dS} = \frac{F(a - cS)}{S(\lambda F - k)} \quad (4)$$

faz düzlem denklemini göz önüne alalım. Öncelikle, F ve S nin her ikisinin de pozitif olması gerektiğinden, (2)-(3) sisteminin negatif nüfus gösteremeyeceğini gerçekleyelim. Dikkat edilirse $F = 0 = S$ çözüm olduğu gibi, aynı zamanda basit eşyönlülerdir. Dahası, $F = 0$, $dF/dS = 0$ a ve $S = 0$ da $dF/dS = \infty$ a karşılık gelir. Böylece, F ve S pozitif ise, asla negatif olamaz, çünkü bunun için ya F ya da S eksenini kesmek zorundadır ve bu da olanaksızdır. Diğer basit eşyönlüler sırası ile $dF/dS = 0$ ve $dF/dS = \infty$ a karşılık gelen $S = a/c$ ve $F = k/\lambda$ doğrularıdır.





Şekil: Bir av-avcı modeli için basit eşyönlüler.

Faz düzlem denkleminin iki olası aykırı noktası vardır:

$$F = \frac{k}{\lambda}, S = \frac{a}{c} \quad (5)$$

$$F = 0, S = 0. \quad (6)$$

Bunlar zamana bağlı modelin denge noktasına karşılık gelirler. (6) ile verilen sıfır nüfusu bizim için ilgi çekici değildir.



Şimdi, $(S = a/c, F = k/\lambda)$ noktasının bir kararlı denge nüfusu olduğunu gösterelim.

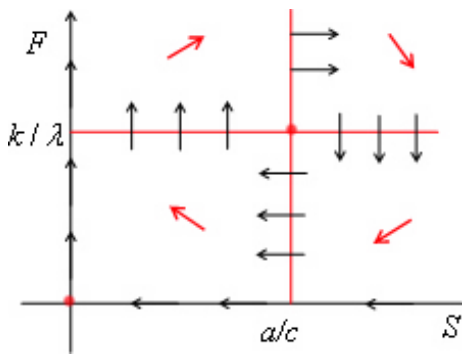
(4) denkleminin denge noktası a , c , k ve λ parametrelerinin hepsine birden bağlıdır. Fakat sadece k/λ ve a/c oranları belirgin bir öneme sahiptir.

Şimdi, (4) modelini eşyönlülerden dikkatlice inceleyelim: Eğer balığın sayıca büyüme oranı a artarsa, balığın denge nüfusu değişmez kalır, ve sadece köpekbalığı etkilenir. Artan sayıdaki köpekbalıkları ise, balık doğumlarının artmasını engeller.

Eğer köpekbalığının ölüm oranı k azalır, bu sadece köpekbalıklarının denge nüfusunu etkilemediği gibi, daha garibi, avlarının denge sayısı azalır. Bunun anlamı, daha zor olan köpekbalığı nüfusunu dengelemek için daha az balık gereklidir.

Köpekbalığının, balık öldürme yeteneğine karşılık gelen c değerinin artması, köpekbalıklarında azalmaya yol açar. Köpekbalıkları için daha fazla besin anlamına gelen λ değerini artırmak, köpekbalıklarının artmasına yol açtığı gibi, balık sayısının da azalmasına yol açar; yani avcının yeterliliğini artırmak avın denge sayısının azalması demektir.



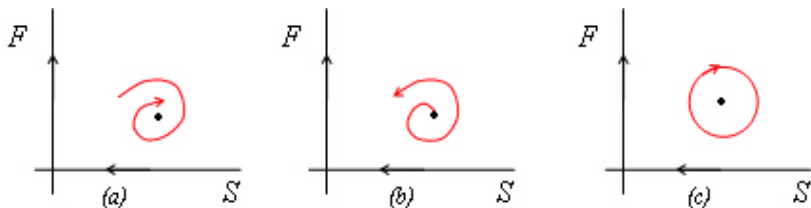


Şekil: Av-avcı modelinin niteliksel davranışı.

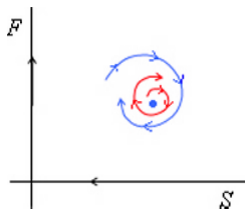
$dF/dS = 0$ veya $dF/dS = \infty$ a karşılık gelen eşyönlüler oldukça kullanışlıdır. Çünkü bunlar türün azaldığı veya arttığı bölgeleri birbirinden ayırırlar.



Genel olarak faz düzlem denklemi saat doğrultusunda bir yapı gösterir. En az üç tür olası yörünge vardır.

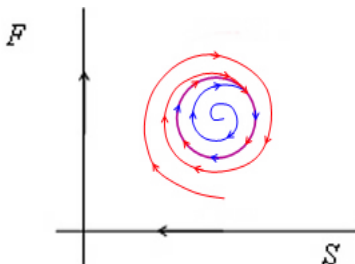


Şekil: Olası yörüngeler.



Şekil: Yörüngeler

Balık ve köpekbalıkları nüfusu bir salınım sonrasında kendi denge noktalarına yaklaşmalarına rağmen, bir çözüm eğrisi parçası içe doğru spiral çiziyor; belli bir zamandan sonra balık ve köpekbalıklarının nüfuslarının artmasına rağmen, diğer bir çözüm eğrisi parçası da dışa doğru spiral çiziyor. Eğer bu geçerli ise, bunların arasında bir çözüm eğrisinin var olacağını umabiliriz şöyle ki; bu çözüm için nüfuslar aynı değere dönerek, periyodik bir salınıma neden olurlar. Bu duruma bir **limit döngü** denir



Şekil: Limit döngü.



(2)-(3) modelinde bir limit döngü **olamayacağını** gösterelim. Denge noktasında pertürbasyon yöntemi ile lineerleştirme yapılırsa,

$$F = \frac{k}{\lambda} + \epsilon F_1, \quad S = \frac{a}{c} + \epsilon S_1$$

(2)-(3) denklemlerinde yazılıp lineer olmayan terimler yok edilirse

$$\begin{cases} \frac{dF_1}{dt} = -\frac{ck}{\lambda} S_1 \\ \frac{dS_1}{dt} = \frac{a\lambda}{c} F_1 \end{cases} \quad (7)$$

olup, $F_1(0) = F_{10}$, $S_1(0) = S_{10}$ başlangıç koşulları altında çözümü (Laplace dönüşümü ile)

$$\begin{cases} F_1(t) = F_{10} \cos \sqrt{akt} - \frac{c}{\lambda} \sqrt{\frac{k}{a}} S_{10} \sin \sqrt{akt} \\ S_1(t) = -\frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{k}{a}} F_{10} \sin \sqrt{akt} + S_{10} \cos \sqrt{akt} \end{cases}$$



$$\begin{cases} F_1(t) = F_{10} \cos \sqrt{ak}t - \frac{c}{\lambda} \sqrt{\frac{k}{a}} S_{10} \sin \sqrt{ak}t \\ S_1(t) = -\frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{k}{a}} F_{10} \sin \sqrt{ak}t + S_{10} \cos \sqrt{ak}t \end{cases}$$

çözümleri balık ve köpekbalıkları sayılarının, dairesel frekansları \sqrt{ak} olmak üzere, denge nüfusları etrafında salınım yaptıklarını gösterir. Salınımın periyodu $T = 2\pi/\sqrt{ak}$ olup, sadece a ve k büyüme oranlarına bağlıdır. $1/T$ ise birim zamandaki *titreşim sayısını* yani *frekansını* verir.



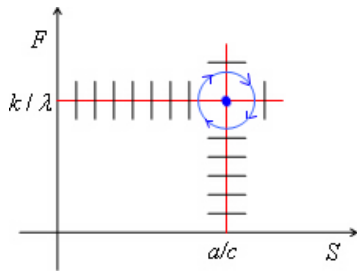
(7) denklemlerinden

$$\frac{dF_1}{dS_1} = -\frac{kc^2}{a\lambda^2} \frac{S_1}{F_1}$$

olup, bu denklem $F_1(0) = F_{10}$, $S_1(0) = S_{10}$ başlangıç koşulları altında çözümlenerek

$$F_1^2 + \frac{kc^2}{a\lambda^2} S_1^2 = F_{10}^2 + \frac{kc^2}{a\lambda^2} S_{10}^2$$

yörüngesi elde edilir ki bu bir elipstir. Bu durumdaki denge noktasına bir **merkez** denir.



Şekil: Av-avcı faz düzlem salınımı.

$F_1(t)$ çözümünü

$$F_1(t) = A \sin(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{ak} \quad (8)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada **genlik** olarak adlandırılan A ve **faz kayması** olarak adlandırılan α belirlenecek olan sabitlerdir.

$$F_1(t) = A \sin \omega t \cos \alpha + A \cos \omega t \sin \alpha = F_{10} \cos \sqrt{ak}t - \frac{c}{\lambda} \sqrt{\frac{k}{a}} S_{10} \sin \sqrt{ak}t$$

olduğundan, $A \cos \alpha = -\frac{c}{\lambda} \sqrt{\frac{k}{a}} S_{10}$ ve $A \sin \alpha = F_{10}$ ve buradan

$$A = \sqrt{F_{10}^2 + \frac{kc^2}{a\lambda^2} S_{10}^2} \quad (9)$$

ve

$$\tan \alpha = -\sqrt{\frac{a}{k} \frac{\lambda F_{10}}{c S_{10}}}$$

olur.



Benzer şekilde, $S_1(t)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} S_1(t) &= B \sin(\omega t + \beta) \\ &= B \sin \omega t \cos \beta + B \cos \omega t \sin \beta \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir ki buradan

$$B \cos \beta = \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{a}{k}} F_{10} \quad \text{ve} \quad B \sin \beta = S_{10}$$

olup, böylece

$$B = \sqrt{S_{10}^2 + \frac{a\lambda^2}{kc^2} F_{10}^2} \quad (11)$$

ve

$$\tan \beta = -\sqrt{\frac{k}{a} \frac{cS_{10}}{\lambda F_{10}}} \quad (12)$$



(9), (10), (11) ve (12) ifadelerinden, denge noktası komşuluğunda nüfusların sabit genlikte salınım yaptıklarını görürüz ki bu etkisiz kararlı durumdur (II(B):

$p = 0$, $q = -(-ck/\lambda)(a\lambda/c) = ka > 0$, $\Delta = -4ka < 0$). Bu bir sınır durumu olduğu için sonuç her zaman sağlanmayabilir. Lineerleştirmede gözardı edilen lineer olmayan terimler muhtemelen küçük değişikliklere yol açar ki bu da çözümün yapısal davranışını tümüyle değiştirmeye yeterlidir. Lineer olmayan terimler çözümün küçük genlikte salınım yapmasına ve denge nüfusunun kararlı olmasına veya tersine büyük genlikte salınım yapmasına ve denge nüfusunun kararsız olmasına neden olabilir. Bu nedenle, *linear analizden bir sonuç elde edemeyiz.*



$(0, 0)$ denge noktasının kararlılığını çalışmak için pertürbasyon yöntemi uygulayalım. (2)-(3) sisteminde $F = \epsilon F_1$, $S = \epsilon S_1$ yazıp lineer olmayan terimleri atarsak

$$\epsilon \frac{dF_1}{dt} = \epsilon a F_1 \implies F_1(t) = F_{10} e^{at} \quad (13)$$

$$\epsilon \frac{dS_1}{dt} = -k \epsilon S_1 \implies S_1(t) = S_{10} e^{-kt} \quad (14)$$

elde ederiz. Bu çözümlerin anlamı, köpekbalığı nüfusu üstel olarak azalırken, balık nüfusunun da üstel olarak artmasıdır. $p = a - k$, $q = -ak < 0$, $\Delta = (a + k)^2 > 0$ olduğundan, **I(C) kararsız durumu** oluşur. Yani, denge noktası bir **semer noktasıdır**.



Eşyönlüleri ve basit yörüngeleri kullanarak veya faz düzlem denklemini çözerek yörüngeleri çizebiliriz ve hareket doğrultusunu belirlemek için (13) ve (14) eşitliklerini kullanabiliriz.

Faz düzlem denklemini

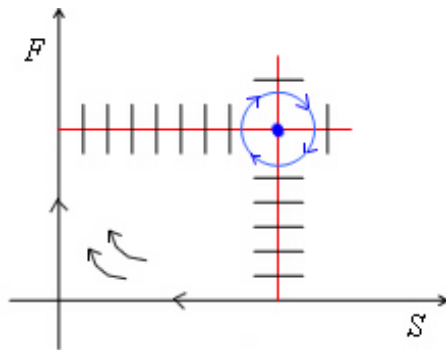
$$\frac{dF_1}{dS_1} = -\frac{aF_1}{kS_1} \quad (15)$$

Olup, çözümlerse

$$\begin{aligned} \ln |F_1| &= -\frac{a}{k} \ln |S_1| + \ln |F_{10}| - \frac{a}{k} \ln |S_{10}| \\ \Rightarrow \ln \left| \frac{F_1}{F_{10}} \right| &= -\frac{a}{k} \ln \left| \frac{S_1}{S_{10}} \right| \\ \Rightarrow F_1 &= F_{10} \left(\frac{S_1}{S_{10}} \right)^{-a/k} \end{aligned}$$

elde edilir.





Şekil: Lineerleştirilmiş kararlılık analizi.

Şimdi

$$\frac{dF}{dS} = \frac{(a - cS)F}{(\lambda F - k)S}$$

faz düzlem denklemini çözüp, $F(0) = F_0$ ve $S(0) = S_0$ başlangıç koşullarını kullanılırsak

$$\lambda F - k \ln |F| = a \ln |S| - cS + \lambda F_0 - k \ln |F_0| - a \ln |S_0| + cS_0$$

$$\lambda(F - F_0) + c(S - S_0) = k \ln \left| \frac{F}{F_0} \right| + a \ln \left| \frac{S}{S_0} \right|$$

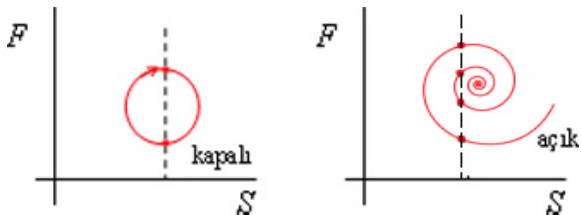
⇒

$$\left(\frac{F}{F_0} \right)^k \left(\frac{S}{S_0} \right)^a = e^{\lambda(F - F_0) + c(S - S_0)} \quad (16)$$

elde ederiz.



(16) ile verilen eğrilerin kapalı eğriler olduklarına dikkat edelim



Şekil: Kapalı ve açık eğriler arasındaki olası fark.

Son denklemden,

$$F^{-k} e^{\lambda F} = \frac{e^{\lambda F_0 + c S_0}}{F_0^k S_0^a} S^a e^{-c S} \quad (17)$$

yazabiliriz. $K = (e^{\lambda F_0 + c S_0} / F_0^k S_0^a)$ olmak üzere, her iki tarafa Z dersek,

$$Z = F^{-k} e^{\lambda F} \rightarrow +\infty \begin{cases} \text{cebirselsel} & (F \rightarrow 0) \\ \text{üstel} & (F \rightarrow +\infty) \end{cases} \quad (18)$$

$$Z = K S^a e^{-c S} \rightarrow 0 \begin{cases} \text{cebirselsel} & (S \rightarrow 0) \\ \text{üstel} & (S \rightarrow +\infty) \end{cases} \quad (19)$$

olur.



$$\frac{dZ}{dF} = e^{\lambda F} F^{-k} (-kF^{-1} + \lambda) = 0$$

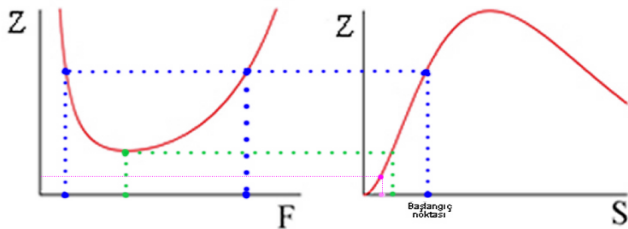
dan $F = k/\lambda$ minimum ve

$$\frac{dZ}{dt} = KS^a e^{-cS} (aS^{-1} - c) = 0$$

dan $S = a/c$ maksimum verir. $(a/c, k/\lambda)$ nın bir denge noktası olduğunu not edelim.

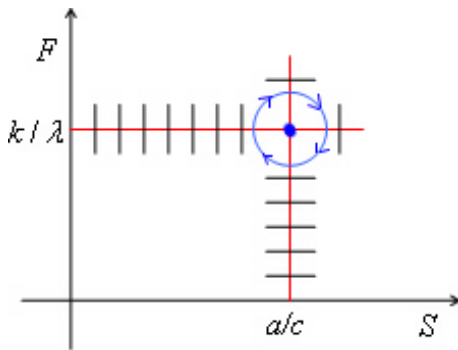


Şimdi F de 0, 1 veya 2 değer üretecek şekilde S nin özel bir değerini seçelim:



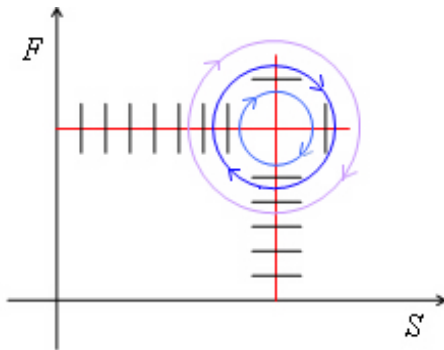
Şekil: (17) fonksiyonun çözümünün grafiksel gösterimi.

$Z = KS^a e^{-cS}$ nin grafiğinde kritik noktadan geçtikten sonra, F nin aynı değer çifti, S nin farklı bir değerine karşılık gelir. Böylece, bir çözüm verecek şekilde K değerinin yeterince büyük olması durumunda faz düzlemindeki eğri, şekildeki gibi, kapalı bir eğri olmalıdır.



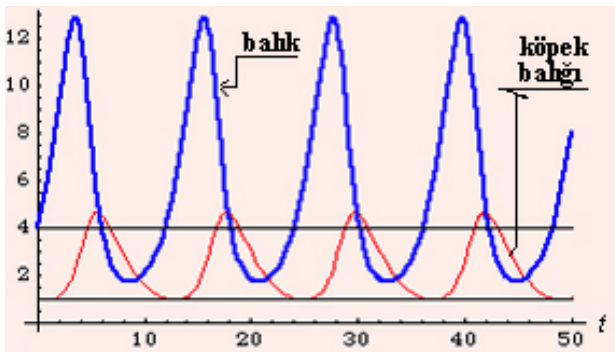
Şekil: Bir yörünge.

K nın her bir değeri için en fazla bir yörünge vardır. Şekilde, K nın üç farklı değerine karşılık gelen yörüngeler çizilmiştir.



Şekil: Av-avcı ekosisteminin yörüngeleri.

Sonuç olarak $(a/c, k/\lambda)$ denge noktası komşuluğundaki yörüngeler kapalıdır. Balık ve köpekbalığı nüfusları zamanın periyodik fonksiyonlarıdır. Kaba bir grafik şekildeki gibi verilebilir. Doğada gözlemlendiği gibi, köpekbalığı nüfusunun artması, balık nüfusunun artışını takip eder.



Şekil: Balık-köpekbalığı salınımı.

Şimdi, salınım periyodları sırası ile T ve τ olan avcı ve av nüfuslarının, başlangıç nüfuslarından bağımsız olarak, ortalama nüfuslarını düşünelim.

$$\frac{dS}{dt} = -(k + \lambda F)S$$

olup, böylece

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1}{S} dS = \int_{t_0}^{t_0+T} (-k + \lambda F) dt$$

ve $S(t_0 + T) = S(t_0)$ olduğundan,

$$0 = -kT + \int_{t_0}^{t_0+T} \lambda F dt$$

yani,

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) dt = \frac{k}{\lambda}$$

olur. O halde *avın ortalama nüfusu denge noktasıdır.*



Benzer şekilde,

$$\frac{dF}{dt} = (a - cS)F$$

olup, buradan

$$\int_{t_1}^{t_1+\tau} \frac{1}{F} dF = \int_{t_1}^{t_1+\tau} (a - cS) dt$$

ve $F(t_1 + \tau) = F(t_1)$ olduğundan,

$$0 = a\tau - \int_{t_1}^{t_1+\tau} cS dt$$

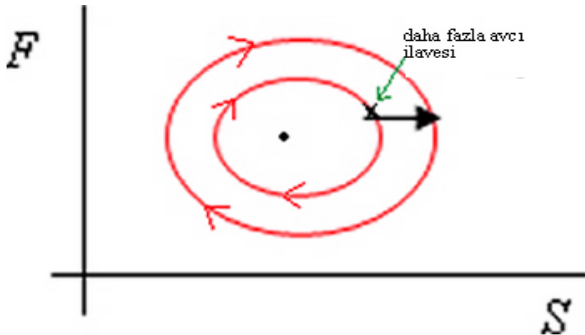
yani,

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_1+\tau} S(t) dt = \frac{a}{c}$$

olur. O halde **avcının ortalama nüfusu denge noktasıdır.**



Eğer, daha fazla avcı eklersek, (2)-(3) modelinden nasıl bir sonuç üretebiliriz?



Şekil: Ortama aniden daha fazla avcı ekleme etkisi.

Bu durum salınının genliğinin artmasına neden olabilir. Ortalama nüfuslar denge nüfusları olduklarından, aynı kalırlar.



Eğer, nüfusları ile orantılı olarak, örneğin tuzak kurarak veya zehir kullanarak, her iki nüfus da azaltılırsa bu durumda ne olur? Bu durumda γ ve δ sabitler olmak üzere, yeni model

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= (a - cS)F - \gamma F \\ \frac{dS}{dt} &= -(k + \lambda F)S - \delta S\end{aligned}$$

şeklini alır. Böylece, av ve avcı için yeni denge nüfusları, sırası ile

$$\frac{k + \delta}{\lambda} \text{ ve } \frac{a - \gamma}{c}$$

olur. **Bu ise avın artması ve avcının azalması demektir.** O halde, halihazırda doğal avcılar tarafından kontrol altında tutulan av nüfusunu azaltmaya çalışmak, aslında çoğalmalarına yardım etmek demektir.



Aşağıdaki örnek olay bu durumu açıklamaya yeterli olacaktır: 1868 yılında Avusturalya'da yaşayan bir böcek türü kazayla Amerika Birleşik Devletlerine taşınır ve bu böcek Amerikan turunçgil endüstrisini tehdit etmeye başlar. Böcekten kurtulmak için, Avusturalyadan onun avcısı olan uğurböcekleri ithal edilir. Uğurböcekleri, bu böcekleri bağıl olarak düşük bir düzeye çekmeyi başarırlar. Daha sonraları, böcekleri yok etmek için DDT keşfedildiğinde, sayılarını daha fazla azaltmak için DDT kullanılmaya başlanır. Fakat bu ilaç uğurböcekleri için de öldürücü olduğu için, ilacın kullanımı sonucu zararlı böcek sayısının arttığı görülmüştür.



Çoğu avcı, birden çok tür ile beslenir. Çoğalma için doğal avlarının olması tercih nedeni olmasına rağmen, eğer avcılar alternatif bir kaynaktan da besleniyorsa, bu durumda olası bir alternatif model,

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= (a - bF - cS)F \\ \frac{dS}{dt} &= (\alpha - \beta S + \lambda F)S\end{aligned}$$

sistemidir. $b = 0 = \beta$ ve $a = \alpha$ durumunda, model

$$\frac{dF}{dt} = (a - cS)F \quad (20)$$

$$\frac{dS}{dt} = (a + \lambda F)S \quad (21)$$

olup, çözümü

$$S(t) = \frac{(\lambda F_0 + cS_0)e^{at}}{\lambda \frac{F_0}{S_0} e^{\frac{\lambda F_0 + cS_0}{a}(1-e^{at})} + c}$$

$$F(t) = \frac{(\lambda F_0 + cS_0)e^{at}}{\lambda + c \frac{S_0}{F_0} e^{\frac{\lambda F_0 + cS_0}{a}(e^{at}-1)}}$$



Durum 1. $a > 0$:

λ ve $c(> 0)$ ile verilen etkileşimden bağımsız olarak $t \rightarrow \infty$ için $F(t) \rightarrow 0$ ve $S(t) \rightarrow \infty$ dur. Bunun anlamı, etkileşim durumunda av ve avcı aynı pozitif büyüme oranına sahip olduğu zaman, av yok olacaktır.

Durum 2. $a = 0$:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} F(t) = \frac{(\lambda F_0 + c S_0)}{\lambda + c \frac{S_0}{F_0} e^{(\lambda F_0 + c S_0)t}} \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} S(t) = \frac{(\lambda F_0 + c S_0)}{\lambda \frac{F_0}{S_0} e^{-(\lambda F_0 + c S_0)t} + c}$$

olup, $t \rightarrow \infty$ için $F(t) \rightarrow 0$ ve $S(t) \rightarrow \frac{(\lambda F_0 + c S_0)}{c}$ dir.

Durum 3. $a < 0$:

$t \rightarrow \infty$ için $F(t) \rightarrow 0$ ve $S(t) \rightarrow 0$ dir.



Karmaşa

$$\frac{dP}{dt} = (r - sP)P = rP(1 - P/K) \quad (22)$$

lojistik modeli Euler yöntemi ile çözersek

$$\begin{aligned} P(t+h) &\approx P(t) + hP'(t) \\ &= P(t) + h(r - sP(t))P(t). \end{aligned} \quad (23)$$

$t = t_0$ başlangıç anından başlayarak ardışık zaman periyodlarını $t_{n+1} = t_n + h$ ($n = 1, 2, \dots$) ile ve karşılık gelen nüfusları da $P(t_n + h)$ ile gösterirsek

$$P(t_{n+1}) = P(t_n + h) \approx P(t_n) + h(r - sP(t_n))P(t_n)$$

olup, ardışık iterasyonlardan elde edilen $P(t_{n+1})$ değerini P_{n+1} ile gösterirsek

$$P_{n+1} = P_n + h(r - sP_n)P_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (24)$$

ile elde edilen P_{n+1} , t_{n+1} zamanındaki gerçek nüfus $P(t_{n+1})$ e bir yaklaşım verir.



Şimdi öyle bir nüfus kabul edelim ki, (24) itersyonlarını kullanarak hesaplanan P_{n+1} yaklaşımlarının $P(t_{n+1})$ gerçek nüfus değerlerine yeterince yakın olacak şekilde bir h adım uzunluğu seçilebilsin. Örneğin bu, düzenli periyodlarla kısa süreli üreme sezonlarına sahip hayvan nüfuslarında uygulanabilir. h , arka arkaya gelen üreme sezonları arasındaki aralık kabul edilirse, bu durumda bir üreme sezonundaki P_n nüfusu sadece bir önceki sezon boyunca P_{n-1} nüfusuna bağlı olur ve P_n , bir sonraki üreme sezonundaki P_{n+1} nüfusunu tam olarak belirleyebilir.



(24) denkleminde $a = 1 + hr$ ve $b = hs$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
 P_{n+1} &= P_n + h(r - sP_n)P_n \\
 &= (1 + hr)P_n - hsP_n^2 \\
 &= (a - bP_n)P_n
 \end{aligned} \tag{25}$$

denklemi elde edilir ki bu **lojistik fark denklemi** olarak adlandırılır. Son olarak, (25) denkleminde

$$P_n = \frac{a}{b}x_n \tag{26}$$

alınırsa,

$$x_{n+1} = a(1 - x_n)x_n \tag{27}$$

basit formu elde edilir.



Limit döngü

$$x_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

var olduğunu kabul ederek, x_{∞} un a büyüme parametresine ne şekilde bağlı olduğunu araştıralım. Yani a yı işlemlerde girdi ve x_{∞} u ise çıktı olarak kabul ederek, çıktının girdiye ne şekilde bağlı olduğunu inceleyelim. Belli bir x_0 değerinden başlayarak (27) iterasyonlarını bulunduğu aşağıdaki tablo sonuçları elde edilir:



a	$\lim x_n$
1.5	0.3333
1.7	0.4118
1.9	0.4737
2.0	0.5000
2.2	0.5455
2.5	0.6000
2.8	0.6429
2.9	0.6552
3.1	0.7646 0.5580
3.3	0.8236 0.4794
3.4	0.8422 0.4520
3.5	0.8270 0.3828 0.8750 0.5009
3.52	0.8233 0.3731 0.8795 0.5121
3.54	0.8203 0.3648 0.8833 0.5218



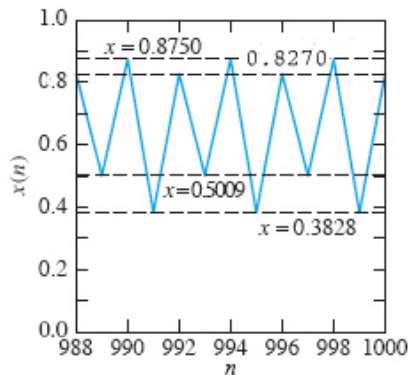
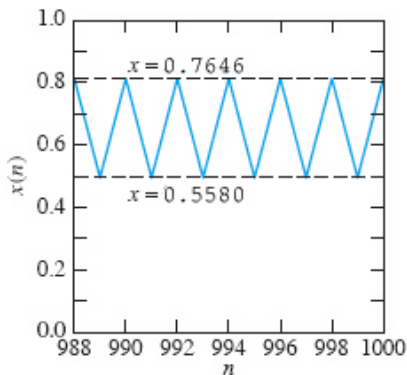
a	$\lim x_n$
3.55	0.8278 0.3703 0.8817 0.5405 0.8127 0.3548 0.8874 0.5060
3.56	0.8333 0.3738 0.8808 0.5509 0.8086 0.3488 0.8899 0.4945
3.565	0.8332 0.3724 0.8815 0.5523 0.8083 0.3475 0.8905 0.4860
	0.8372 0.3769 0.8799 0.55659 0.80649 0.3457 0.8912 0.4954
3.57	kaos
3.597	0.8993 0.5008 0.8328 0.3641 0.8857 0.4386 0.8579
	0.3927 0.8753 0.4183 0.8657 0.5967 0.7900 0.3257
3.599	kaos
3.60	0.8972 0.5275 0.8216 0.3525 0.9000 0.4474 0.8546 0.3877
	0.8772 0.5794 0.7984 0.3320
3.61	kaos
3.835	0.958634 0.494515 0.152075
3.842	0.9602 0.4919 0.1507 0.9591 0.4809 0.1467
3.848	0.9616 0.5096 0.1571 0.9574 0.4652 0.1407
	0.9620 0.5016 0.1541 0.9582 0.4686 0.1419 →kaos



Tablodan görüldüğü gibi $x_0 = 0.5$ başlangıç nüfus kesiri ile başladığında a parametresinin $1.5 < a < 3$ değerleri için (27) iterasyonları yakınsak olup (x_n) belli bir x_∞ değerine yakınsar (örneğin $a = 1.5$ için $x_n \rightarrow 0.33$ olur). $a > 3$ için (x_n) dizisinin iki farklı noktaya (alterne) yakınsadığını görürüz (örneğin $a = 3.10$ için $x_n \rightarrow 0.5580$ (n tek) ve $x_n \rightarrow 0.7646$ (n çift) olur). Yani, yaklaşık olarak $3 < a < 3.5$ için *iki nüfuslu* bir **limit döngü** vardır. $a = 3.5$ olduğunda, (x_n) nin bu kez 4 farklı nüfusa yaklaştığını, yani "**periyodun ikiye katlandığını**" farkediyoruz $a = 3.55$ de 8 periyodlu, $a = 3.565$ de 16 periyodlu limit döngülerin oluştuğunu görmekteyiz. Peki bu periyod katlaması bu düzenle mi devam eder? $a \rightarrow 3.570$ için parçalanmaların çok hızlı bir şekilde katlanarak bir **karmaşaya** gittiğini görmekteyiz. Daha ilginç olan, $a = 3.59$ ile $a = 3.60$ arasında ondört periyodlu bir döngü ve katlı parçalanmalarını, $a = 3.60$ ile $a = 3.61$ arasında oniki periyodlu bir döngü ve katlı parçalanmalarını ve aralık duyarlılığını artırarak, örneğin son olarak, $a = 3.83$ yakınlarında kaostan dönülerek bu kez **üç limitli** bir döngünün ortaya çıktığını ve $a = 3.9$ a kadar tekrar altı, oniki, yirmidört vs. periyodlu bölünmeler oluştuğunu görebiliriz.



Üç periyodlu döngünün görülmesi önemlidir, çünkü 1975 yılında J.York ve T.Y.Li, "üç periyodlu bir döngünün" varlığının; her sayıda periyodik döngünün yanısıra, hiç periyodik olmayan kaotik döngülerin de varlığına işaret ettiğini ispatlamışlardır. "Üç periyod kaosa götürür".



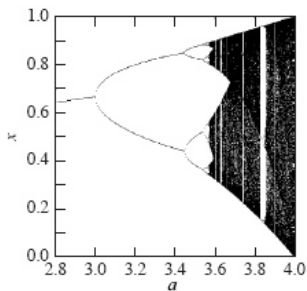
Şekil: İki ve dört nüfuslu limit döngü



Kaos hakkında vurgulanmaya değer son nokta; fizikçi M. Feigenbaum'um 1970 li yıllarda keşfettiği *Feigenbaum sabiti*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4.66920160981\dots$$

dir. Bu, kaotik davranışın da aslında bir düzen içerdiğini göstermektedir.



Şekil: $x_0 = 0.5$ için yaba görüntüsü. Dikey beyaz boşluklarda kaostan dönülüp tekrar limit döngüler başlar.



