**Maksimum ve Minimumlar**

**Tanım 1.** $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$K(\varepsilon) = \{(x,y) : \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} < \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^2$$

kümesine $(p,q)$ noktasının $\varepsilon$ komşuluğu denir.

**Tanım 2.** $A \subset \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $(a,b) \in A$ olsun. Her $(x,y) \in K_1(\varepsilon)$ için

$$f(x,y) \leq f(a,b)$$

olacak şekilde $(a,b)$ noktasının bir $K_1(\varepsilon)$ komşuluğu varsa $f$ fonksiyonu $(a,b)$ noktasında bir yerel (lokal) maksimuma sahiptir denir. $f(a,b)$ sayısına da $f$ fonksiyonunun bir yerel maksiumum değeri denir.

$(c,d) \in A$ olsun. Her $(x,y) \in K_2(\varepsilon)$ için

$$f(x,y) \geq f(c,d)$$

olacak şekilde $(a,b)$ noktasının bir $K_1(\varepsilon)$ komşuluğu varsa $f$ fonksiyonu $(a,b)$ noktasında bir yerel (lokal) minimuma sahiptir denir. $f(c,d)$ sayısına da $f$ fonksiyonunun bir yerel minimum değeri denir.

Yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına fonksiyonun yerel ekstremum noktaları denir.

Eğer bir $(m,n)$ noktasının her komşuluğunda $f(x_1,y_1) \leq f(m,n)$ olacak şekilde $(x_1,y_1)$ ve $f(x_2,y_2) \geq f(m,n)$ olacak şekilde
$(x_2,y_2)$ noktası varsa $(m,n)$ noktasına bir eyer noktası denir.

$(p,q) \in A$ olsun. Her $(x,y) \in A$ için $f(x,y) \leq f(p,q)$ ise $f$ fonksiyonu $(p,q)$ noktasında mutlak maksimuma, $(r,s) \in A$ ve her $(x,y) \in A$ için $f(x,y) \geq f(r,s)$ ise $f$ fonksiyonu $(r,s)$ noktasında mutlak minimuma sahiptir denir.

**Teorem 1.** $z = f(x,y)$ fonksiyonu $(a,b)$ noktasında ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon ve

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

olsun.

(1) $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) < 0$ ise $(a,b)$ eyer noktasıdır.

(2) $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) > 0$ ve $f_{xx}(a,b) > 0$ ise $(a,b)$ noktası yerel minimum noktasıdır.

(3) $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) > 0$ ve $f_{xx}(a,b) < 0$ ise $(a,b)$ noktası yerel maksimum noktasıdır.

**Örnek 1.** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$ fonksiyonunun yerel ekstremum değerlerini bulunuz.

**Çözüm.** $f_x = 2x + y - 2$, $f_y = x + 2y - 3$ olup buradan $2x + y - 2 = 0$ ve $x + 2y - 3 = 0$ eşitliklerini sağlayan $P = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ noktası kritik noktadır.

$f_{xx}(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})f_{yy}(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}) - f_{xy}^2(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}) = 4 - 1 = 3 > 0$ elde edilir. Böylece $f_{xx}(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}) = 2 > 0$ olduğundan $P = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ noktası bir yerel minimum noktasıdır.

**Örnek 2.** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi üzerinde $P(1,2,0)$ noktasına en yakın olan Q noktasının koordinatlarını bulunuz. p noktasının koniye olan uzaklığını hesaplayınız.

**Çözüm.** Q noktasının koordinatlarına $x, y, z$ diyelim. Q noktası koni üzerinde olduğundan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ olup $Q(x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$ ile $P(1,2,0)$ noktası arasındaki uzaklığın minimum olması gerekmektedir. Bu uzaklık

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + x^2 + y^2}$$

şeklindedir. Bu ifadenin minimum olması için

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + x^2 + y^2$$

ifadesinin minimum olması gerekir.

$$(1) f_x(x,y) = 2(x-1) + 2x = 0 \Rightarrow 4x - 2 = 0$$

ve

$$(2) f_y(x,y) = 2(y-2) + 2y = 0 \Rightarrow\Rightarrow 4y - 4 = 0$$

ve böylece $(x,y) = (\frac{1}{2}, 1)$ elde edilir. O halde Q noktasının koordinatları $Q(\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{5}}{2})$ olacaktır. Bu durumda $P(1,2,0)$ noktasının koniye olan uzaklığı

$$d = \sqrt{(\frac{1}{2} - 1)^2 + (1-2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

birim bulunur.