

BÖLÜM 7. BÖLGE DÖNÜŞÜMLERİ, İKİ KATLI İNTEGRALLER

7.1 Bölge Dönüşümleri

Tanım 7.1.1 (u, v) noktaları bir D bölgesinin elemanları olmak üzere,

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases} \quad (1)$$

sistemi verildiğinde (u, v) koordinatlarından (x, y) koordinatlarına bir dönüşüm tanımlanmış olur. uv - düzlemindeki (u, v) noktaları D bölgesini taradığında (x, y) noktaları da xy - düzleminde bir B bölgesini tarar. Bu durumda (1) dönüşümü D bölgesini B bölgesine dönüştürmüştür. Bu nedenle (1) dönüşümüne bir **bölge dönüşümü** de denir. Bu dönüşümü T ile gösterirsek,

$$\begin{aligned} T & : D \rightarrow B \\ (u, v) & \rightarrow (x, y) = (f(u, v), g(u, v)) \end{aligned}$$

dönüşümü bir bölge dönüşümüdür. Eğer, f_u, f_v, g_u, g_v kısmi türevleri D bölgesinde sürekli ve bu bölgedeki her bir (u, v) için

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \neq 0$$

ise (1) denklemleri u ve v değişkenlerine göre çözülebilir. Bu çözüm;

$$\begin{cases} u = F(x, y) \\ v = G(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} T^{-1} & : B \rightarrow D \\ (x, y) & \rightarrow (u, v) = (F(x, y), G(x, y)) \end{aligned}$$

ters dönüşümü elde edilir. Böylece (1) ve (2) denklem sistemleri yardımıyla B ve D bölgelerinin

noktaları arasında bir bire-bir eşleme kurulmuş olur.

Tanım 7.1.2

$$\begin{cases} x_1 = f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ x_2 = f_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \dots\dots\dots \\ x_n = f_n(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases} \quad (3)$$

dönüşümü verildiğinde $i, k = 1, 2, \dots, n$ için $\frac{\partial x_i}{\partial u_k}$ türevleri mevcut olmak üzere,

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

determinantına (3) dönüşümünün **fonksiyonel determinanti** veya **Jakobiyeni** denir.

Örnek 1.

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \end{cases} \quad (4)$$

sisteminin ve tersinin Jakobiyenini bulunuz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} \\ &= u(\sin^2 v + \cos^2 v) \\ &= u \end{aligned}$$

olur. (4) eşitliğinden

$$\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + y^2} \\ v = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

bulunur. Bu ters dnttimin Jakobiyeni,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{1}{u}\end{aligned}$$

olur.

rnek 2.

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z &= \rho \cos \theta\end{aligned}$$

dnttm iin

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)}$$

Jakobiyenini hesaplayınız.

zm.

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \rho \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

olur. Bu determinant açıldığında

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin \theta$$

bulunur.