7.3 İki Katlı İntegrallerin Hesabı

Teorem 7.3.1 (Birinci Fubini Teoremi): $B = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ ve $f : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu takdirde

$$\iint\limits_B f(x, y)\, dA = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

olur.

Örnek 1. $B = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 4\}$ bölgesi üzerinde $f(x, y) = 2xy^3$ fonksiyonunun iki katlı integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_B f(x, y)\, dA &= \int\limits_0^4 \int\limits_1^3 2xy^3 dx dy \\
&= \int\limits_0^4 \left(\int\limits_1^3 2xy^3 dx \right) dy \\
&= \int\limits_0^4 \left(x^2 y^3 \right) |_1^3\, dy \\
&= \int\limits_0^4 \left(9y^3 - y^3 \right) dy \\
&= \int\limits_0^4 8y^2 dy \\
&= 512
\end{aligned}$$

olur. İntegrasyon sırasını değiştirirsek; yani önce y, sonra x değişkenine göre integral alınırsa sonuç değişmez. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\iint\limits_B f(x,y)\,dA &= \int\limits_1^3\int\limits_0^4 2xy^3dydx \\
&= \int\limits_1^3\left(\int\limits_0^4 2xy^3dy\right)dx \\
&= \int\limits_1^3 \frac{1}{2}xy^4 \mid_0^4 dx \\
&= \int\limits_1^3 128xdx \\
&= 512
\end{aligned}$$

olur. İntegrasyon sırası değiştirilirse; yani önce y, sonra x değişkenine göre integral alınırsa sonuç değişmez. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\iint\limits_B f(x,y)\,dA &= \int\limits_1^3\int\limits_0^4 2xy^3dydx \\
&= \int\limits_1^3\left(\int\limits_0^4 2xy^3dy\right)dx \\
&= \int\limits_1^3 \frac{1}{2}xy^4 \mid_0^4 dx \\
&= \int\limits_1^3 128xdx \\
&= 512
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 7.3.2 (İkinci Fubini Teoremi): $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli, $\forall\ x\in[a,b]$ için $u(x)\le v(x)$ ve $B=\{(x,y): a\le x\le b,\ u(x)\le y\le v(x)\}$ olsun. $f:B\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dA=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

sağlanır.

Örnek 2. $B = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3, \ -2x \leq y \leq x^2+1\}$ bölgesi üzerinde

$$\iint_B \frac{2y}{(x+1)^2} dA$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
\iint_B \frac{2y}{(x+1)^2} dA &= \int_0^3 \int_{-2x}^{x^2+1} \frac{2y}{(x+1)^2} dy dx \\
&= \int_0^3 \frac{y^2}{(x+1)^2} \Big|_{-2x}^{x^2+1} dx \\
&= \int_0^3 \frac{(x^2+1)^2 - 4x^2}{(x+1)^2} dx \\
&= \int_0^3 (x-1)^2 \, dx \\
&= 3
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3. Aşağıdaki iki katlı integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 (4-x-y)\, dydx$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dydx$ **c)** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x (x+y)\, dydx$ **d)** $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} dxdy$

Çözüm. a)

$$\begin{aligned}\int_0^2\int_0^1 (4-x-y)\,dydx &= \int_0^2 \left(4y - xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1\, dx\\ &= \int_0^2 \left(\frac{7}{2}-x\right) dx\\ &= \frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2\\ &= 5\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dydx &= \int_0^1 x^2 \arctan y\,\Big|_0^1\, dx\\ &= \int_0^1 x^2\left(\arctan 1 - \arctan 0\right)dx\\ &= \int_0^1 x^2\frac{\pi}{4}dx\\ &= \frac{\pi}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^x (x+y)\,dydx &= \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^x\, dx\\ &= \int_0^1 \frac{3}{2}x^2dx\\ &= \frac{1}{2}x^3\Big|_0^1\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_y^1 x^2e^{xy}dxdy &= \int_0^1\int_0^x x^2e^{xy}dydx \\
&= \int_0^1 xe^{xy}\mid_0^x dx \\
&= \int_0^1 \left(xe^{x^2}-x\right)dx \\
&= \left(\frac{1}{2}e^{x^2}-\frac{x^2}{2}\right)\mid_0^1 \\
&= \frac{e}{2}-1
\end{aligned}$$

7.4 İki Katlı İntegrallerde Bölge Dönüşümleri

Bölge dönüşümleri bölümünde belirtildiği gibi, $uv-$ düzlemindeki bir D bölgesi

$$\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$$

dönüşümü yardımıyla $xy-$ düzlemindeki bir B bölgesi üzerine bire bir olarak dönüştürülmüş olsun.

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(g(u,v),h(u,v))\,|J|\,dudv$$

eşitliği ile verilir. Eğer özel olarak

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

alınarak kutupsal koordinatlarına geçilirse

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

olur. Çünkü bu dönüşüm için

$$J=\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(r,\theta\right)}=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r$$

olarak bulunur.

Eğer $D=\{(r,\theta):s\left(\theta\right)\leq r\leq t\left(\theta\right),\ \alpha\leq\theta\leq\beta\}$ ise

$$\iint\limits_B f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)rdrd\theta=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{s(\theta)}^{t(\theta)}f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)rdrd\theta$$

olur.

Örnek 1 B bölgesi, köşeleri $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$, $(0,\pi)$ olan paralelkenar olduğuna göre

$$\iint\limits_B\left(x-y\right)^2\sin^2\left(x+y\right)dxdy$$

integralini

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$$

dönüşümü yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} x+y &= 3\pi\rightarrow v=\pi \\ x+y &= \pi\rightarrow v=\pi \\ y &= x+\pi\rightarrow u=-\pi,\ y=x-\pi\rightarrow u=\pi \end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

olup

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{B} (x-y)^2 \sin^2(x+y)\,dxdy \\
&= \iint\limits_{D} u^2 \sin^2 v \frac{1}{2} dudv \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{3\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u^2 \sin^2 v dudv \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{3\pi} \frac{u^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} \sin^2 v dv \\
&= \frac{\pi^3}{3}\int\limits_{\pi}^{3\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2v)\,dv \\
&= \frac{\pi^3}{6}\left(v - \frac{1}{2}\sin 2v\right)\Big|_{\pi}^{3\pi} = \frac{\pi^4}{3}
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 2 B bölgesi, $5x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ elipsi tarafından sınırlanan bölgedir.

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = -2u + v \end{cases}$$

dönüşümü yardımıyla

$$I = \iint\limits_{B} \sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2}\,dA$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$x = u + v$$
$$y = -2u + v$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} 5(u+v)^2 + 2(u+v)(-2u+v) + 2(-2u+v)^2 &= 1 \\ 9\left(u^2+v^2\right) &= 1 \end{aligned}$$

ise

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{9}$$

çemberi elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

olup

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_B \sqrt{5x^2+2xy+2y^2}\,dA \\ &= \iint\limits_D \sqrt{9(u^2+v^2)}\,3\,dudv \\ &= 9\iint\limits_D \sqrt{u^2+v^2}\,dudv \end{aligned}$$

integrali elde edilir. Kutupsal koordinatlara geçilirse

$$\begin{aligned} I &= 9\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{3}} r.rdrd\theta \\ &= 9\int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{3}}\,d\theta \\ &= 3\left(\frac{1}{27}\right)2\pi \\ &= \frac{2\pi}{9} \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3 B bölgesi, $x^2+y^2=1$ ile $x^2+y^2=16$ çemberleri tarafından sınırlanan bölgedir.

$$I=\iint\limits_B \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{4}} dA$$

integralini, kutupsal koordinatlar yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

ve

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\iint\limits_B \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{4}} dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_1^4 \left(r^2\right)^{\frac{1}{4}} rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^4 r^{\frac{3}{2}} drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2}{5} r^{\frac{5}{2}} \Big|_1^4 \, d\theta \\
&= \frac{2}{5}(32-1)\,2\pi \\
&= \frac{124}{5}\pi
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.