7.5 İki Katlı İntegrallerin Uygulamaları

A. Alan Hesabı

İki katlı integral tanımlarken, $(x_k, y_k) \in B_k$ için

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint\limits_{B} f(x,y)\,dxdy$$

olduğu verilmişti. Her $(x,y) \in B$ için $f(x,y) = 1$ olarak tanımlanırsa yukarıdaki eşitlik

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \iint\limits_{B} dxdy$$

şeklini alır. Parçalanma nasıl yapılırsa yapılsın ΔA_k alanlarının toplamı B bölgesinin alanı olacağından

$$Alan\,(B) = \iint\limits_{B} dxdy$$

olur. Kutupsal koordinatlara geçildiğinde, Jakobiyen r olacağından

$$Alan\,(B) = \iint\limits_{B} r dr d\theta$$

olarak bulunur.

Örnek 1. $y = x^2$ eğrisi ve $y = 2x + 3$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanının hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned} x^2 &= 2x+3 \\ &\Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ &\Longrightarrow x_1 = 3,\, x_2 = -1 \end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{2x+3} dydx \\
&= \int_{-1}^{3} y \mid_{x^2}^{2x+3} dx \\
&= \int_{-1}^{3} \left(2x+3-3x^2\right) dx \\
&= \left(x^2+3x-\frac{1}{3}x^3\right) \mid_{-1}^{3} \\
&= \frac{32}{3}\ br^2
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 2. $r = 12\cos 3\varphi$ gülünün bir yaprağının alanını bulunuz.

Çözüm.

$$r = 12\cos 3\varphi$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
A &= 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{r=0}^{12\cos 3\theta} rdrd\theta \\
&= a\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} r^2 \mid_{0}^{12\cos 3\theta} d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} 12^2\left(\frac{\cos 6\theta+1}{2}\right) d\theta \\
&= 72\left(\frac{\sin 6\theta}{6}+\theta\right) \mid_{0}^{\frac{\pi}{6}} \\
&= 12\pi
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3. $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ lemniskatı tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

ise

$$r = 0 \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

olup buradan

$$\begin{aligned}
A &= 4\iint\limits_B r dr d\theta \\
&= 4\int\limits_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_{r=0}^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r dr d\theta \\
&= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta d\theta \\
&= 2a^2 \frac{\sin 2\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= a^2 \ br^2
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

B. Hacim Hesabı

f fonksiyonu B bölgesinde sürekli ve pozitif tanımlı ise

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

ifadesi, taban alanı ΔA_k, yüksekliği $f(x_k, y_k)$ olan dik prizmaların hacimleri toplamıdır. Eğer B bölgesi parçalanmanın normu sıfıra gidecek şekilde parçalanırsa bu hacimlerin toplamı, $z = f(x, y)$ denklemli yüzey, B bölgesi ve B bölgesini taban kabul eden dik silindir arasında kalan bölgenin V hacmine eşit olur. O halde

$$V = \iint\limits_B f(x, y) \, dx dy$$

olur.

Örnek 1. $a,\, b > 0$ dır. $xOy-$ düzlemi, $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ paraboloidi ve $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2\dfrac{x}{a}$ silindiri arasında kalan bölgenin hacmini hesaplayınız.

Çözüm.

$$V = \iint\limits_{B} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dxdy$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = r\cos\theta \\ \dfrac{y}{b} = r\sin\theta \end{cases}$$

denilirse, $J = abr$ ve $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2\dfrac{x}{a}$ eğrisi $r = 2\cos\varphi$ çemberine dönüşeceğinden

$$\begin{aligned} V &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r^2 abrdrd\varphi \\ &= 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} ab\frac{r^4}{4} \left.\right|_0^{2\cos\varphi} d\varphi \\ &= \frac{ab}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi \\ &= 2ab\left(\frac{3}{2}\varphi + \sin\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right) \left.\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3}{2}\pi ab \end{aligned}$$

olur.

Örnek 1 $z = x + y$, $x = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm.

$$V = \iint\limits_{B} f(x,y)\, dxdy$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y)\, dydx \\
&= \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2} y^2 \right) |_0^{1-x}\, dx \\
&= \int_0^1 \left[x - x^2 + \frac{1}{2} (1-x)^2 \right] dx \\
&= \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{6} (1-3)^3 \right] |_0^1 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

C. Kütle Hesabı

$x \circ y$ düzleminde, yoğunluğu $\sigma(x, y)$ olan bir levha B bölgesine yerleştiriliyor. σ yoğunluk fonksiyonu B üzerinde sürekli olsun. B nin herhangi bir parçalanması $P = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ ve B_k da alınan herhangi bir nokta (x_k, y_k) olsun. Herbir B_k bölgesine yerleştirilen levhanın kütlesi, yaklaşık olarak ΔA_k, B_k bölgesinin alanı olmak üzere $\sigma(x_k, y_k)\, \Delta A_k$ olur. Buna göre, bütün levhanın M kütlesi, yaklaşık olarak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma(x_k, y_k)\, \Delta A_k$$

olur. P parçalanmasının normu ne kadar küçük olursa yaklaşık o derece iyi olur. Şu halde levhanın M kütlesi

$$M = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k, y_k)\, \Delta A_k$$

olacaktır. Sağ taraftaki limit $\iint\limits_B \sigma(x, y)\, dxdy$ integrali olduğundan

$$M = \iint\limits_B \sigma(x, y)\, dxdy$$

olarak bulunur. Eğer levha homogen, yani $\sigma(x,y) = k$ ise $M = k.A$ olur. Burada A, B bölgesinin alanıdır.

Örnek 1 5 cm yarıçaplı daire şeklindeki bir levhanın yoğunluğu, her noktada o noktanın daire merkezine olan uzaklığı ile orantılı olarak değişmektedir. Dairenin sınırı üzerinde yoğunluk 10 olduğuna göre bu levhanın kütlesini bulunuz.

Çözüm. (x,y) noktasındaki yoğunluk $\sigma(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$ dir.

$x^2+y^2 = 25$ için $\sigma(x,y) = 10$ olduğundan

$$\begin{aligned} k\sqrt{25} &= 10 \\ 5k &= 10 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

olup $\sigma(x,y) = 2\sqrt{x^2+y^2}$ dır. Buna göre

$$\begin{aligned} M &= \iint\limits_B \sigma(x,y)\,dxdy \\ &= \iint\limits_B 2\sqrt{x^2+y^2}dxdy \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^5 r.rdrd\varphi \\ &= 2\int_0^{2\pi}\frac{r^3}{3}\Big|_0^5\,d\varphi \\ &= \frac{500}{3}\pi \end{aligned}$$

olur.

D. Ağırlık Merkezinin Bulunması

(x,y) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x,y)$ olan ve xOy düzleminde bir B bölgesine yerleştirilen bir levhayı gözönüne alalım. B bölgesinin bir parçalanması $P = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ ve (x_k, y_k) da B_k

bölgesinde bir nokta olsun. B_k bölgesinde bulunan levhanın kütlesi, ΔA_k, B_k bölgesinin alanı olmak üzere, yaklaşık olarak $\sigma(x_k, y_k)\Delta A_k$ kadardır. Bu kütleyi (x_k, y_k) noktasına toplanmış gibi düşünebiliriz. Böyle noktalara **küresel nokta** adı verilir. Bilindiği gibi, bir küresel nokta sisteminin ağırlık merkezinin $\overline{x}$ ve $\overline{y}$ koordinatları

$$\overline{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \sigma(x_k, y_k)\Delta A_k}{\sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k, y_k)\Delta A_k}, \qquad \overline{y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k \sigma(x_k, y_k)\Delta A_k}{\sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k, y_k)\Delta A_k}$$

biçiminde tanımlanır. $\sigma(x, y)$ sürekli olduğunda, yukarıdaki toplamlar birer integral olup $\|P\| \to 0$ için B üzerinde iki katlı integrale yaklaşır. Buna göre,

$$\overline{x} = \frac{\iint\limits_B x\sigma(x, y)\,dA}{\iint\limits_B \sigma(x, y)\,dA}, \qquad \overline{y} = \frac{\iint\limits_B y\sigma(x, y)\,dA}{\iint\limits_B \sigma(x, y)\,dA}$$

olur. Paydadaki integraller levhanın kütlesi olduğundan

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iint\limits_B x\sigma(x, y)\,dA, \qquad \overline{y} = \frac{1}{M}\iint\limits_B y\sigma(x, y)\,dA$$

yazılabilir. Eğer levhanın yoğunluğu sabit bir k değerine eşit, yani levha homogen ise, $M = k.A$ ve

$$\iint\limits_B xk\,dx\,dy = k\iint\limits_B x\,dx\,dy$$

olacağından

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint\limits_B x\,dx\,dy, \qquad \overline{y} = \frac{1}{A}\iint\limits_B y\,dx\,dy$$

olarak yazılır. Burada A, levhanın alanını göstermektedir.

Örnek 1 $y^2 = 4x + 4$ ve $y^2 = -2x + 4$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homogen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm. Önce levhanın alanını bulalım.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2}\int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}\left(4-y^2\right)} dxdy \\
&= 2\int_{0}^{2}\int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}\left(4-y^2\right)} dxdy \\
&= 2\int_{0}^{2} x \mid_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}\left(4-y^2\right)} dy \\
&= \int_{0}^{2}\left(6-\frac{3}{2}y^2\right) dy \\
&= \left(6y-\frac{1}{2}y^3\right)\mid_0^2 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{A}\iint_B xdxdy \\
&= \frac{1}{8}\int_{-2}^{2}\int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}\left(4-y^2\right)} xdxdy \\
&= \frac{1}{8}\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}\int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}\left(4-y^2\right)} dy \\
&= \frac{1}{16}\int_{-2}^{2}\left(\frac{3}{16}y^4-\frac{3}{2}y^2+3\right) dy \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

olur. Bölge $Ox-$ eksenine göre simetrik ve levha homogen olduğundan $\overline{y}=0$ olacaktır. O halde ağırlık merkezi $M\left(\frac{2}{5},0\right)$ noktasıdır.