## 8.2 Üç katlı integrallerde bölge dönüşümü

$xyz$ koordinat sisteminde bir $G$ bölgesi verilsin.

$$\left.\begin{array}{l} x = g(u,v,w) \\ y = h(u,v,w) \\ z = k(u,v,w) \end{array}\right\}$$

ile $(u,v,w)$ koordinat sisteminde $D$ bölgesine dönüştürülsün. Bu durumda

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_D f(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w))|J|\,dudvdw$$

yazılır. Burada,

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

biçimindedir.

Üç katlı integrallerde en önemli bölge dönüşümleri küresel koordinatlar ve silindirik koordinatlarda yapılır. Şimdi bunları tanımlayalım.

### A. Küresel koordinatlar

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{array}\right\}, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

olsun. Böylece bir $P(x,y,z)$ noktasının $(\rho,\theta,\varphi)$ koordinatları elde edilir. Bu koordinatlara küresel koordinatlar denir.

**Örnek:** Küresel koordinat sistemindeki denklemi $\rho = 2$ olan yüzeyin kartezyen koordinat sistemindeki denklemini bulunuz.

$x^2+y^2+z^2=\rho^2$ olduğundan $\rho = 2$ denkleminin kartezyen koordinatlardaki denklemi $x^2+y^2+z^2=4$ küresi olarak bulunur.

Eğer üç katlı integrallerde küresel koordinatlar kullanılmak istenirse:

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta$$

olduğundan

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_D f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,d\rho d\theta d\varphi$$

ifadesi kullanılır.

Eğer integral bölgesi bir küre ya da küre parçası ise küresel koordinatları kullanmak yarar sağlar.

**Örnek:** $I = \int\limits_{x=-a}^{a} \int\limits_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int\limits_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dzdydx$ integralini hesaplayınız.

Küresel koordinatlara geçildiğinde $0 \le \rho \le a$, $0 \le \theta \le \pi/2$ ve $0 \le \varphi \le 2\pi$ olup

$$
\begin{aligned}
I = \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dzdydx &= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2} \int\limits_{\rho=0}^{a} \rho^2 \sin^2\theta\, \rho^2 \sin\theta\, d\rho d\theta d\varphi \\
&= \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} \left( \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^a \right) \sin^3\theta\, d\theta d\varphi \\
&= \frac{4\pi a^5}{5}
\end{aligned}
$$

bulunur.

**B. Silindirik koordinatlar**

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi \\
y &= r\sin\varphi \\
z &= z
\end{aligned}
\right\}
$$

olsun. Böylece bir $P(x,y,z)$ noktasının $(r,\varphi,z)$ koordinatları elde edilir. Bu koordinatlara silindirik koordinatlar denir.

Eğer üç katlı integrallerde silindirik koordinatlar kullanılmak istenirse:

$$
J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r
$$

olduğundan

$$
\iiint\limits_G f(x,y,z) dxdydz = \iiint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r\, d\rho d\theta d\varphi
$$

ifadesi kullanılır.

**Örnek:** Silindirik koordinatlar yardımıyla

$$I=\int\limits_{y=0}^{2}\int\limits_{x=-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}\int\limits_{z=0}^{\sqrt{x^2+y^2}} z(x^2+y^2)\,dzdxdy$$

integralini hesaplayınız.

Silindirik koordinatlara geçildiğinde, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$ ve $J=r$ olduğundan, $0\leq r\leq 2\sin\varphi$ ve $0\leq\varphi\leq\pi$ bulunur. O halde

$$I=\int\limits_{y=0}^{2}\int\limits_{x=-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}\int\limits_{z=0}^{\sqrt{x^2+y^2}} z(x^2+y^2)\,dzdxdy=\int\limits_{\varphi=0}^{\pi}\int\limits_{r=0}^{2\sin\varphi}\int\limits_{z=0}^{r} zr^2\,r\,dzdrd\varphi=\frac{5\pi}{3}.$$