## 8.3 Üç katlı integrallerin uygulamaları

### A. Hacim hesabı

$\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k = \iiint\limits_{G} f(x,y,z)dxdydz$ olduğunu biliyoruz.

Eğer $\forall (x,y,z) \in G$ için $f(x,y,z) = 1$ alırsak $G$ bölgesinin hacmi

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \iiint\limits_{G} dxdydz$$

biçimindedir.

**Örnek:** $a$ yarıçaplı bir kürenin hacmini üç katlı integral yardımıyla hesaplayınız.

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ olup bölge küre olduğundan küresel koordinatlara geçmek yarar sağlar.

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{array}\right\}, \qquad 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \rho \le a$$

olup verilen kürenin küresel koordinatlardaki denklemi $\rho = a$ biçimindedir. O halde

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{a} \rho^2 \sin\theta \, d\rho d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3 \ \text{br}^3$$

bulunur.

### B. Kütle hesabı

Üç boyutlu uzayda yoğunluk sabit ise;

yoğunluk $\sigma(x,y,z) = K$ (sabit) $\Rightarrow M = KV$ sağlanır, burada $M$ kütle, $V$ ise hacimdir.

Ancak yoğunluk sabit değilse aşağıdaki yöntemi izlemeliyiz.

$G$ bir sac levha $(x,y,z) \in G$ için $\sigma(x,y,z)$ yoğunluk olsun. $\sigma : G \to \mathbb{R}$, $u = \sigma(x,y,z)$ sürekli olsun. Bu durumda

$$M \cong \sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$$

olup

$$M = \iiint\limits_{G} \sigma(x,y,z)\, dV$$

biçimindedir.

**Örnek:** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin üst yarısı ile $z = 0$ düzlemi arasına yerleştirilen bir cismin herhangi bir noktadaki yoğunluğu o noktanın orijine olan uzaklığı ile doğru orantılıdır. Bu cismin kütlesini hesaplayınız.

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{array}\right\} , J = \rho^2 \sin\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \rho \le a$$

küresel koordinatları kullanılarak

$$M = \iiint\limits_G \sigma(x,y,z)\, dxdydz = \alpha \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2} \int\limits_{\rho=0}^{a} \rho\, \rho^2 \sin\theta\, d\rho d\theta d\varphi = \frac{\pi}{2}\alpha a^4$$

elde edilir.

### C. Ağırlık merkezi bulunması

Yukarıdaki cismin ağırlık merkezinin koordinatları iki katlı integralde olduğu gibi

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint\limits_G x\, \sigma(x,y,z)\, dxdydz$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iiint\limits_G y\, \sigma(x,y,z)\, dxdydz$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint\limits_G z\, \sigma(x,y,z)\, dxdydz$$

ifadeleri ile bulunur.

**Örnek:** Üstten $z = x^2 + y^2$ paraboloidi, alttan $xOy$-düzlemi ($z = 0$), yandan $x^2 + y^2 = 4$ silindiri tarafından sınırlanan homojen cismin kütlesini ve ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Cisim homojen olduğundan $M = KV$ ifadesi kullanılarak

$$M = K \iiint\limits_G dxdydz = K \iint\limits_B \int\limits_{z=0}^{x^2+y^2} dzdxdy = K \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} z\Big|_0^{x^2+y^2} dxdy \qquad (1)$$

$$= K \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} (x^2+y^2) dxdy = K \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{2} r^2\, r\, drd\varphi = 8K\pi \qquad (2)$$

bulunur. Ayrıca cisim homojen ve bölge simetrik olduğundan ağırlık merkezi $z$-ekseni üzerinde olacaktır. O halde

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 0, \quad \bar{z} = \frac{1}{8K\pi} \iiint\limits_G z\,K\,dxdydz = \frac{1}{8\pi} = \iiint\limits_G z\,dxdydz$$

olup, silindirik koordinatlar kullanılarak $\bar{z} = \dfrac{4}{3}$ elde edilir. O halde ağırlık merkezi $(0, 0, 4/3)$ olur.