9.3 Eğrisel İntegrallerin Temel Teoremleri

Bu kısımda $\int\limits_C F \cdot dr$ integrali için bazı temel teoremler göreceğiz.

Teorem 9.3.1 C eğrisinin başlangıç noktası (x_1, y_1, z_1) ve bitim noktası (x_2, y_2, z_2) olsun. f bu C eğrisini içeren bir bölgede 1. mertebeden kısmi türevlere sahip olsun ve

$$\operatorname{grad} f\,(x, y, z) = f_x \overrightarrow{i} + f_y \overrightarrow{j} + f_z \overrightarrow{k}$$

C eğrisi üzerinde sürekli ise

$$\int\limits_C \operatorname{grad} f \cdot dr = f\,(x_2, y_2, z_2) - f\,(x_1, y_1, z_1)$$

gerçeklenir.

Tanım: Başlangıç ve bitim noktaları aynı olan tüm eğriler üzerinden integralin değeri değişmiyorsa bu durumda $\int\limits_C F \cdot dr$ integrali yoldan bağımsızdır denir.

Teorem 9.3.2 Eğer F vektör alanı bir f'nin gradiyenti ise $\int\limits_C F \cdot dr$ integrali yoldan bağımsızdır.

Örnek: $\int\limits_{(0,0)}^{(1,2)} \left(y^2 - 2xy\right) dx + \left(2xy - x^2 + 1\right) dy$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $P(x, y, z) = y^2 - 2xy$, $Q(x, y, z) = 2xy - x^2 + 1$ olmak üzere $P_y = Q$'dir. Yani integral içindeki ifade tam diferensiyeldir, integral yoldan bağımsızdır. Şimdi integral içindeki ifade hangi f fonksiyonunun tam diferensiyelidir, onu bulalım.

Tam diferensiyellikten
$f_x = P = y^2 - 2xy$ olduğundan eşitliğin her iki tarafının x'e göre integralini alalım.

$f\,(x, y) = \int (y^2 - 2xy)dx = y^2x - x^2y + h(y)$ elde edilir. Bulduğumuz f fonksiyonunun y'ye göre kısmi türevini alıp Q'ya eşitleyelim.
$f_y = 2yx - x^2 + h'\,(x) = Q = 2xy - x^2 + 1$ olup $h'\,(x) = 1$ yani $h\,(x) = y$ elde edilir. Yani $f\,(x, y) = y^2x - x^2y + y$ olur. O halde

$$\int\limits_{(0,0)}^{(1,2)} \left(y^2 - 2xy\right) dx + \left(2xy - x^2 + 1\right) dy = f\,(1, 2) - f\,(0, 0) = 4$$

Teorem 9.3.3(Green Teoremi) B, $x \circ y$ düzleminde düşey(veya yatay) basit bölge, C'de bu bölgeyi çevreleyen ve saat yönünün tersinde yönlendirilmiş bir eğri olsun. P ve Q fonksiyonları B bölgesinde 1. mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olsun. O halde

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

gerçeklenir.

Örnek: C eğrisi $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ eğrisi ile $x-$ekseni arasında kalan bölgenin sınırı olup saat yönünün ters yönünde yönlendirilmiştir.

$$\int\limits_C x^2 y dx - xy^2 dy$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $P = x^2 y$, $Q = -xy^2$ olup $P_y \neq Q_x$ olmasından tam diferensiyel değildir. Dolayısıyla yoldan bağımsız değildir.

Green Teoreminden

$I = \int\limits_C x^2 y dx - xy^2 dy = \iint\limits_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = -\iint\limits_B (x^2 + y^2)dxdy$

Kutupsal koordinatları kullanırsak;

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = a$, $j = r$ ve $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \pi$

$I = -\int\limits_0^\pi \int\limits_0^a r^2 r dr d\varphi = -\frac{a^4}{4}\pi$

9.4 Eğrisel İntegralin Uygulamaları

Bu kısımda eğrisel integraller yardımıyla alan, yay uzunluğu, iş, kütle ve ağırlık merkezi bulunmasını göreceğiz.

A. Alan Hesabı

B basit bir bölge, C bu bölgenin sınır eğrisi olup pozitif yönlü olsun.

$$B.Alan = \frac{1}{2}\int\limits_C xdy - ydx$$

Örnek: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin sınırladığı bölgenin alanını eğrisel integraller yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm: $x = a\cos t$, $y = b\sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ olup $dx = -a\sin t dt$, $dy = b\cos t dt$

$$\begin{aligned} Alan &= \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos tb\cos t + b\sin ta\sin t)dt \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt \\ &= ab\pi \end{aligned}$$

B.Yay Uzunluğu

C düzgün bir eğri, f skaler alanı göstermek üzere ve $C : \overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$, $a \leq t \leq b$ olsun. Verilen eğrinin uzunluğu L olsun.

$$L = \int_C dl = \int_a^b \|r'(t)\|\, dt$$

Örnek: a yarıçaplı bir çemberin çevresini eğrisel integral yardımıyla bulunuz.

Çözüm: $C : \overrightarrow{r}(t) = a\cos t\overrightarrow{i} + a\sin t\overrightarrow{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ olup $\overrightarrow{r'}(t) = -a\sin t\overrightarrow{i} + a\cos t\overrightarrow{j}$ elde edilir. O halde

$\|r'(t)\| = a$

$$\begin{aligned} L = \int_C dl &= \int_0^{2\pi} \|r'(t)\|\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} adt \\ &= 2\pi a \end{aligned}$$

C.Kütle ve Ağırlık Merkezi Hesabı

C eğrisi üzerine bir telin yerleştirildiğini düşünelim. Bu telin (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y, z)$ olsun.

Kütle= $M = \int_C \sigma(x, y, z)dl$ olur.

Ağırlık merkezinin koordinatları $G(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{M}\int_C x\sigma(x, y, z)dl \\ \overline{y} &= \frac{1}{M}\int_C y\sigma(x, y, z)dl \\ \overline{z} &= \frac{1}{M}\int_C z\sigma(x, y, z)dl \end{aligned}$$

Örnek: $x \circ y$ düzleminde bulunan ve yarıçapı a olan merkezi çemberin üzerine yerleştirilmiş telin bir (x, y) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y, z) = |x| + \frac{a}{\pi}$ dir. Bu cismin kütlesini ve ağırlık merkezi koordinatlarını bulunuz.

Çözüm: $C:\overrightarrow{r}(t)=a\cos t\overrightarrow{i}+a\sin t\overrightarrow{j},\ 0\leq t\leq 2\pi$ olup $\overrightarrow{r'}(t)=-a\sin t\overrightarrow{i}+a\cos t\overrightarrow{j}$ elde edilir. O halde

$\|r'(t)\|=a$

$$\begin{aligned} M &= \int_C \sigma(x,y,z)dl \\ &= \int_C (|x|+\tfrac{a}{\pi})dl \\ &= \int_0^{2\pi} (|a\cos t|+\tfrac{a}{\pi})adl \\ &= 6a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \tfrac{1}{M}\int_C x\sigma(x,y,z)dl \\ &= \tfrac{1}{6a^2}\int_C x(|x|+\tfrac{a}{\pi})dl \\ &= 0 \end{aligned}$$

Benzer şekilde $\overline{y}=0$ bulunur, o halde $G(0,0)$ elde edilir.

D. İş Hesabı

$F(x,y,z)=P(x,y,z)\overrightarrow{i}+Q(x,y,z)\overrightarrow{j}+R(x,y,z)\overrightarrow{k}$ kuvvetinin etkisiyle C eğrisinin başlangıç noktasından bitim noktasına kadar yaptığı iş;

$$W=\int_C F\cdot dl=\int_C Pdx+Qdy+Rdz$$