BÖLÜM 10: YÜZEY İNTEGRALLERİ

Yüzey integralleri integrasyon bölgesi yüzey parçası olan integrallerdir. Bu bölümde önce 1. ve 2.çeşit yüzey integrallerini daha sonra bunların uygulamalarını inceleyeceğiz.

10.1. Birinci Çeşit Yüzey İntegralleri

B, $xOy-$düzleminde sonlu sayıda yatay veya düşey basit bölgelerin birleşimi olsun. $f : B \to \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$, 1.mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon ve S bunun grafiği olsun. Yani;

$$S = \{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in B\}$$

şeklinde ifade edilebilir. $g : S \to \mathbb{R}$, $u = g(x, y, z)$ verilsin. S yüzeyinin bir $p_1 = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ parçalanmasını alalım. $k = 1, 2, ..., n$ için $(x_k, y_k, z_k) \in s_k$ ve $\Delta s_k = s_k$ 'nın alanı olmak üzere;

$$\lim_{\|p_1\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} g(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k = I$$

limiti varsa bu limite g-nin S üzerindeki birinci çeşit yüzey integrali denir ve

$$I = \iint_S g(x, y, z)ds$$

ile gösterilir. Şimdi bu integralin nasıl hesaplandığını gösterelim:

Burada $ds = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy$ olup B bölgesi S yüzeyinin xOy düzlemine dik izdüşümüdür.

$$I = \iint_S g(x, y, z)ds = \iint_B g(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 1: $2x + 2y + z = 2$ düzleminin birinci bölgedeki (yani $x \geq 0$, $y \geq 0$) parçası üzerinde $g(x, y, z) = x + y + z$ ile tanımlı fonksiyonun yüzey integralini hesaplayınız.

S-nin xOy-düzlemine dik izdüşümü B olsun. $f(x, y) = z = 2 - 2x - 2y$ olup $f_x = -2$ ve $f_y = -2$ elde edilir. O halde

$I = \iint_S g(x, y, z)ds = \iint_S (x+y+z)ds = \iint_B (x+y+(2-2x-2y))\sqrt{1 + 4 + 4}dxdy$

$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2 - x - y)dydx = \dfrac{5}{2}.$

elde edilir.

Örnek 2: S yüzeyi birinci bölgede $y = e^x$ silindirinin $x = 0, z = 0, z = 1$ ve $y = 2$ düzlemleri arasında kalan parçası olduğuna göre $\iint\limits_S y^2 z ds$ integralini hesaplayınız.

S-nin yOz-düzlemine dik izdüşümü H olsun. $f(y, z) = x = \ln y$ olup $f_y = \frac{1}{y}$ ve $f_z = 0$ elde edilir. O halde;

$$\iint\limits_S y^2 z ds = \iint\limits_H y^2 z \sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2} dydz = \iint\limits_H y^2 z \sqrt{1 + \tfrac{1}{y^2}} dydz$$

$$= \int\limits_1^2 \int\limits_0^1 \sqrt{1 + y^2} yzdzdy = \tfrac{1}{6}\left(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right).$$

elde edilir.

10.2. Yönlendirilmiş Yüzeyler Üzerinde İntegraller

S yüzeyi verilmiş olsun. Bir (a, b, c) noktasından teğet düzlemi, daha sonra $\vec{n}$ normalini çizelim. Bilindiği üzere iki tane normal vektörü çizebiliriz ($\vec{m} = -\vec{n}$).

S yüzeyi $z = f(x, y)$ ile verilsin. $g(x, y, z) = f(x, y) - z$ şeklinde yazıp $\operatorname{grad} g = g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k}$ olduğundan $\vec{n} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} - \vec{k}$ ve $\vec{m} = -f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + \vec{k}$ vektörleri elde edilir. Bu vektörleri birleştirirsek

$$\vec{n}_1 = \frac{f_x \vec{i} + f_y \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

$$\vec{n}_2 = \frac{-f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

elde edilir. İki vektörde bir normal vektör olup ters yönlüdürler. k-nın işaretine göre vektörlerin nereye baktığını bulabiliriz. Eğer k-nın işareti + ise yukarı, - ise aşağı doğru yönlendirilmiştir.

Bir S yüzeyi ve onun normali verildiğinde bu yüzeye yönlendirilmiş yüzey denir.

Şimdi $F = Pi + Qj + Rk$ vektör alanı, normali $\vec{n}$ olan bir S yönlendirilmiş yüzeyi üzerinde tanımlı olsun. O halde

$$\iint\limits_S \vec{F}.\vec{n} ds$$

integraline F nin S üzerinde 2.çeşit yüzey integrali (Akış integrali) denir. S-

nin xOy-düzlemine dik izdüşümü B olsun. Burada $\vec{n}$ vektörü yerine $\vec{n}_1$ alalım.

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F}.\vec{n}_1 ds &= \iint_B (Pi+Qj+Rk).\frac{f_x\vec{i}+f_y\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{1+f_y^2+f_z^2}}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy \quad \text{(a)}\\ &= \iint_B (Pf_x+Qf_y-R)dxdy\end{aligned}$$

Eğer $\vec{n}$ yerine $\vec{n}_2$ birim normal vektörünü alırsak;

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}_2 ds = \iint_B (-Pf_x-Qf_y+R)dxdy \qquad \text{(b)}$$

elde edilir.

Örnek 1: S yüzeyi $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $1\le z\le 2$ koni parçası olup normali koninin dışına yönlendirilmiştir. $F=x^2i+y^2j+z^2k$ vektör alanının $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ integralini hesaplayınız.

$z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ olup $f_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ve $f_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ olarak hesaplanır. (b)' den;

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}_2 ds = \iint_B \left[-x^2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-y^2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+(x^2+y^2)\right]dxdy$$

$$=-\iint_B \left[\frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}-(x^2+y^2)\right]dxdy$$

elde edilir. Kutupsal koordinatlara geçersek;

$x=r\cos\varphi$

$y=r\sin\varphi$

Burada gerekli işlemler yapılırsa $1\le r\le 2$ ve $0\le\varphi\le 2\pi$ olarak hesaplanır. Böylece;

$$-\iint_B \left[\frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}-(x^2+y^2)\right]dxdy = -\int_0^{2\pi}\int_1^2 \left[\frac{r^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}{r}-r^2\right]rdrd\varphi$$

$$=-\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi-1)drd\varphi=0.$$

elde edilir.

Ödev: S yüzeyi $x^2+y^2+z^2=1$ küresi olsun. Bu küre yüzeyini, kürenin dışına doğru olan normal ile yönlendirelim. $F(x,y,z)=y\vec{i}-x\vec{j}+z\vec{k}$ vektör alanının $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ integralini hesaplayınız.