10.3. Yüzey İntegrallerinin Temel Teoremleri

Eğer bir D bölgesi,
xOy-düzleminin bir B_1 bölgesinde tanımlı f_1 ve f_2;
xOz-düzleminin bir B_2 bölgesinde tanımlı g_1 ve g_2;
yOz-düzleminin bir B_3 bölgesinde tanımlı h_1 ve h_2;
fonksiyonlarının grafikleri arasında kalıyorsa bu bölgeye basit uzay bölge denir.

Teorem 10.3.1 (Stokes Teoremi): S normali n olan ve sonlu alana sahip yönlendirilmiş bir yüzey olsun. Bu yüzeyin C sınır eğrisi kapalı, düzgün bir eğri olup bunun yönü S' den indirgenen yön olsun. $F = Pi + Qj + Rk$ vektör alanı S yüzeyi üzerinde sürekli olsun ve F-nin bileşen fonksiyonları, S-nin sınır noktası olmayan noktalarında 1.mertebeden sürekli kısmı türevlere sahip olsun. O halde

$$\int_C F dr = \iint_S rotF.nds$$

gerçeklenir.

Örnek 1: S yüzeyi $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin xOy-düzleminin üst tarafında kalan parçası olduğuna göre, $F(x, y, z) = (e^x \sin y)i + (e^x \cos y - z)j + yk$ vektör alanının S nin sınır eğrisi üzerinde integralini hesaplayınız. Burada S nin $\vec{n}$ normali pozitif yönlü yani S-nin dışına doğru yönlendirilmiştir.

$B : x^2 + y^2 \le 1$ ve $z = f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ olup $f_x = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ elde edilir. Stokes teoremini uygulamak yarar sağlayacağından;

$$rotF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \sin y & e^x \cos y - z & y \end{vmatrix} = 2i$$

olarak hesaplanır. Böylece;

$$\int_C F dr = \iint_S rotF.nds = \iint_B 2i.\frac{-f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} dxdy = 2\iint_B \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$$

elde edilir. Kutupsal koordinatlara geçersek;
$x = r \cos \varphi$
$y = r \sin \varphi$
olup, gerekli işlemler yapılırsa $1 \le r \le 2$ ve $0 \le \varphi \le 2\pi$ olarak bulunur. Böylece;

$$2\iint_B \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r \cos \varphi}{r} r dr d\varphi = 0$$

elde edilir.

Teorem 10.3.2 (Divergens Teoremi): D basit uzay bölge, S bunun sınır yüzeyi ve $\vec{n}$ vektörü ise bu yüzeyin dışa yönlendirilmiş normali olsun. $F = Pi + Qj + Rk$ vektör alanının bileşen fonksiyonları D bölgesinde 1.mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olsun. O halde

$$\iint_S F.nds = \iiint_D (\operatorname{div} F) dxdydz$$

gerçeklenir. (Not: $\operatorname{div} F = P_x + Q_y + R_z$)

Örnek: S yüzeyi $z = 0, y = 0, y = 2$ düzlemleri ve $z = 1 - x^2$ silindiri ile sınırlı bölgenin yüzeyi olmak üzere, $\vec{n}$ birim normal vektörü dışarı doğru yönlendirilmiştir. $F(x, y, z) = (x + \cos y)i + (x + \sin z)j + (z + e^x)k$ vektör alanı için $\iint_S F.nds$ integralini hesaplayınız.

Divergens teoremini kullanırsak;

$$\iint_S F.nds = \iiint_D (\operatorname{div} F) dxdydz = 3\iiint_D (\operatorname{div} F) dxdydz = 3\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}\int_{0}^{1-x^2} dzdydx =$$

8

elde edilir.

10.4. Yüzey İntegrallerinin Uygulamaları

A) Yüzey Alanı Hesabı

S yüzeyi $z = f(x, y)$ ile verilsin. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k = \iint_S g(x, y, z)ds$ olup $\forall(x, y, z) \in S$ için $g(x, y, z) = 1$ olarak tanımlarsak;

$\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta s_k = \iint_S ds$ olup, $A = \iint_S ds$ elde edilir.

Örnek: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ düzleminin 1.bölgede koordinat düzlemleri arasında kalan parçasının alanını bulunuz.

$A = \iint_S ds = \iint_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy$ olduğundan $z = f(x, y) = c\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c}\right)$ olup $f_x = -\dfrac{c}{a}$ ve $f_y = -\dfrac{c}{b}$ elde edilir. O halde;

$$A = \iint_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy = \iint_B \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2}dxdy = \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$$

elde edilir.

B)Kütle Hesabı

S: $z = f(x, y)$ yüzey parçası bir metal levha g fonksiyonu yerine σ yoğunluk fonksiyonu alalım ve σ sürekli olsun.

$M \tilde{=} \sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k$ olup $M \tilde{=} \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k$,

$$M = \iint_S \sigma(x, y, z)ds$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek: Bir metal huninin şekli $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin $z = 2$ ve $z = 4$ düzlemleri arasında kalan parçasıdır. Bu huninin (x, y, z) noktasındaki yoğunluk $\sigma(x, y, z) = 6 - z$ olduğuna göre bu huninin kütlesini hesaplayınız.

$2 = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ ve $4 = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ olarak yazıp gerekli düzenlemeler yapıldığında, $B : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ elde edilir. $z_x = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ve $z_y = \dfrac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ olup;

$M = \iint_S (6 - z)ds = \iint_S (6 - 2\sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy$

elde edilir. Kutupsal koordinatlara geçersek;

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

Burada gerekli işlemler yapılırsa $1 \leq r \leq 2$ ve $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ olarak hesaplanır. Böylece;

$M = \sqrt{5}\int_0^{2\pi}\int_1^2 (6 - r)rdrd\varphi = \frac{130}{3}\pi$

C) Ağırlık Merkezi Hesabı

S yüzeyi üzerinde yerleştirilmiş metal bir levhanın ağırlık merkezinin koordinatları

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iint_S x\,\sigma(x, y, z)\,ds$$

$$\overline{y} = \frac{1}{M}\iint_S y\,\sigma(x, y, z)\,ds$$

$$\overline{z} = \frac{1}{M}\iint_S z\,\sigma(x, y, z)\,ds$$

biçimindedir.

Örnek: Homojen bir cisim $x^2+y^2+z^2=a^2$ küresinin birinci bölgede bulunan $\frac{1}{8}$'lik parçası üzerine yerleştiriliyor. Bu cismin kütlesini ve ağırlık merkezini bulunuz.

Cisim homojen olduğundan $\sigma(x,y,z)=c$ (sabit) olup $f(x,y)=z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ yazılır. O halde

$$M=c\iint_S ds=\frac{1}{2}c\pi a^2$$

bulunur. Diğer yandan $z_x=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ ve $z_y=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\overline{x}=\frac{2}{c\pi a^2}c\iint_S x\,ds=\frac{2}{\pi a^2}\iint_S x\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy=\frac{2}{\pi a}\iint_B\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

sonucuna ulaşılır. Kutupsal koordinatlara geçersek;
$x=r\cos\varphi$
$y=r\sin\varphi$
Burada gerekli işlemler yapılırsa $0\leq r\leq a$ ve $0\leq\varphi\leq\pi/2$ olarak hesaplanır. O halde $\overline{x}=\frac{2}{\pi a}\int_0^{\pi/2}\int_0^a\frac{r^2\cos\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}}dr\,d\varphi=\frac{a}{2}$ bulunur. Benzer şekilde $\overline{y}=\overline{z}=\frac{a}{2}$ elde edilir. Dolayısıyla ağırlık merkezi

$$G(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2})$$

biçiminde bulunur.