10.4. Yüzey İntegrallerinin Uygulamaları

A) Yüzey Alanı Hesabı

S yüzeyi $z = f(x,y)$ ile verilsin. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} g(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k = \iint\limits_S g(x,y,z)ds$ olup $\forall (x,y,z) \in S$ için $g(x,y,z) = 1$ olarak tanımlarsak;

$\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta s_k = \iint\limits_S ds$ olup, $A = \iint\limits_S ds$ elde edilir.

Örnek: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ düzleminin 1.bölgede koordinat düzlemleri arasında kalan parçasının alanını bulunuz.

$A = \iint\limits_S ds = \iint\limits_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy$ olduğundan $z = f(x,y) = c\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c}\right)$ olup $f_x = -\dfrac{c}{a}$ ve $f_y = -\dfrac{c}{b}$ elde edilir. O halde;

$A = \iint\limits_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy = \iint\limits_B \sqrt{1 + \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{b}\right)^2}dxdy = \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$

elde edilir.

B)Kütle Hesabı

S: $z = f(x,y)$ yüzey parçası bir metal levha g fonksiyonu yerine σ yoğunluk fonksiyonu alalım ve σ sürekli olsun.

$M \cong \sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k$ olup $M \cong \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k$,

$$M = \iint_S \sigma(x,y,z)ds$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek: Bir metal huninin şekli $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ konisinin $z = 2$ ve $z = 4$ düzlemleri arasında kalan parçasıdır. Bu huninin (x,y,z) noktasındaki yoğunluk $\sigma(x,y,z) = 6 - z$ olduğuna göre bu huninin kütlesini hesaplayınız.

$2 = 2\sqrt{x^2+y^2}$ ve $4 = 2\sqrt{x^2+y^2}$ olarak yazıp gerekli düzenlemeler yapıldığında, $B: 1 \leq x^2+y^2 \leq 4$ elde edilir. $z_x = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ve $z_y = \dfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ olup;

$M = \iint_S (6-z)ds = \iint_S (6 - 2\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$

elde edilir. Kutupsal koordinatlara geçersek;

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

Burada gerekli işlemler yapılırsa $1 \leq r \leq 2$ ve $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ olarak hesaplanır. Böylece;

$M = \sqrt{5}\int_0^{2\pi}\int_1^2 (6-r)rdrd\varphi = \frac{130}{3}\pi$

C) Ağırlık Merkezi Hesabı

S yüzeyi üzerinde yerleştirilmiş metal bir levhanın ağırlık merkezinin koordinatları

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iint_S x\,\sigma(x,y,z)\,ds$$

$$\overline{y} = \frac{1}{M}\iint_S y\,\sigma(x,y,z)\,ds$$

$$\overline{z} = \frac{1}{M}\iint_S z\,\sigma(x,y,z)\,ds$$

biçimindedir.

Örnek: Homojen bir cisim $x^2+y^2+z^2=a^2$ küresinin birinci bölgede bulunan $\frac{1}{8}$'lik parçası üzerine yerleştiriliyor. Bu cismin kütlesini ve ağırlık merkezini bulunuz.

Cisim homojen olduğundan $\sigma(x,y,z)=c$ (sabit) olup $f(x,y)=z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ yazılır. O halde

$$M=c\iint\limits_S ds=\frac{1}{2}c\pi a^2$$

bulunur. Diğer yandan $z_x=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ ve $z_y=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\overline{x}=\frac{2}{c\pi a^2}c\iint\limits_S x\,ds=\frac{2}{\pi a^2}\iint\limits_S x\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy=\frac{2}{\pi a}\iint\limits_B\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

sonucuna ulaşılır. Kutupsal koordinatlara geçersek;

$x=r\cos\varphi$

$y=r\sin\varphi$

Burada gerekli işlemler yapılırsa $0\leq r\leq a$ ve $0\leq\varphi\leq\pi/2$ olarak hesaplanır.

O halde $\overline{x}=\frac{2}{\pi a}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{a}\frac{r^2\cos\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}}dr\,d\varphi=\frac{a}{2}$ bulunur. Benzer şekilde $\overline{y}=\overline{z}=\frac{a}{2}$ elde edilir. Dolayısıyla ağırlık merkezi

$$G(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2})$$

biçiminde bulunur.