ZZT201 BİYOMETRİ DERSİ 11. HAFTA DERS NOTLARI
Kaynak Kitap: TEMEL BİYOMETRİ (2013) Kocabaş Z., Özkan, MM ve Başpınar E.
Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi Yayın No:1606 Ders Kitabı 558

HİPOTEZ KONTROLLERİ 2: t-KONTROLLERİ

8.1. Giriş

Temel araştırmalarda üzerinde çalışılan populasyonun dağılımı ve parametreleri hakkında bilgi sahibi olunur. Araştırıcı üzerinde çalıştığı populasyonun parametreleri hakkında bilgi sahibi ise bir önceki bölümde açıklandığı gibi test istatistiği olarak Z-değeri ve test dağılımı olarak Z-dağılımı kullanarak gerekli hipotez kontrolü yapar.

Fakat yapılan çalışmaların çoğunda araştırıcı populasyonun parametreleri hakkında bilgi sahibi değildir. Dolayısıyla populasyona ait parametreleri, örnek yada örneklerden tahmin etmek durumundadır. Bu durumda yapılan hipotez kontrollerinde test istatistiği olarak t-değeri ve test dağılımı olarak da t-dağılımı kullanılır.

8.2. t Dağılımı (Student's t-distribution)

t-dağılımı, 1908 yılında Guinness Brewing şirketinde çalışan istatistikçi W. S. Gosset tarafından geliştirilmiştir. Guinness Brewing şirketinde çalışan Gosset, varyansı bilinmeyen populasyondan alınan örnekler için $\frac{\overline{X} - \mu_x}{S_{\overline{x}}}$ değerlerini hesaplamıştır. Örnek ortalaması ile populasyon ortalaması arasındaki farkı, örnekten tahmin edilen standart hataya böldüğü için hesaplanan değerleri **Z** yerine **t** olarak adlandırmış ve t değerlerinin dağılımını geliştirmiştir. Guinness Brewing şirketi çalışılanlarının kendi isimleri ile yayın yapmasına izin vermediğinden Gosset, dağılımını "Student's" takma adı ile yayınlamıştır. Bu sebeple t-dağılımı "Student's t-dağılımı" olarak da bilinir.

t-dağılımı, varyansı bilinmeyen bir populasyondan alınan n örnek genişliğindeki örneklerden her biri için (8.1) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanan t-değerlerinin dağılımıdır.

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_x}{S_{\overline{x}}} \qquad \dots (8.1)$$

(8.1) numaralı eşitlikte $S_{\overline{x}}$, (5.2) numaralı eşitlik kullanılarak $\frac{S_x}{\sqrt{n}}$ şeklinde hesaplanan ortalamaya ait örnekleme dağılımının, örnekten hesaplanan standart sapmasıdır, kısaca ortalamanın standart hatası olarak ifade edilir. t-dağılımı serbestlik derecesine bağlı bir dağılım olup, t-dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu (8.2) numaralı eşitlikte verildiği gibidir.

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{\pi v}\ \Gamma(\frac{v}{2})} (1 + \frac{t^2}{v})^{-(\frac{v+1}{2})} \qquad \dots (8.2)$$

eşitlikte v, serbestlik derecesidir.

$-\infty$ ile $+\infty$ arasında tüm değerleri içeren t-dağılımı simetrik bir dağılım olup ortalaması sıfırdır. Dağılım simetrik olduğu için $|-t|=|t|$ şartı ile –t ile 0 arasında kalan alan ile 0 ile t arasında kalan alan birbirine eşittir.

t-dağılımı serbestlik derecesine bağlı bir dağılım olduğundan her serbestlik derecesi için farklı bir t dağılımı vardır. Serbestlik derecesi arttıkça t-dağılımı Z-dağılımına yaklaşır ve t-dağılımını oluşturan t değerleri arasındaki değişim, dolayısıyla t-dağılımının varyansı azalır. **(n)/(n-2)** şeklinde hesaplanan dağılımın varyansı, teorik olarak serbestlik derecesi sonsuz olduğu zaman Z- ve t-dağılımları üst üste çakışacağından 1'e eşit olur.

t-dağılımı serbestlik derecesine bağlı bir dağılım olduğu için sonsuz tane t-dağılımı vardır. Bu sebeple Tablo C'de görüldüğü gibi farklı serbestlik dereceli t-dağılımlarında belirli yüzde alanların başladığı t-değerleri verilerek t-dağılımı tabloları düzenlenir. Örneğin, Tablo C'den bakıldığı zaman 5 serbestlik dereceli t-dağılımında örnekten hesaplanan t-değerlerinin %2.5'unun 2.571'den büyük olduğu görülür. t-dağılımı simetrik bir dağılım olduğu için örnekten hesaplanan t-değerlerinin %2.5'u da -2.571'den daha küçüktür. Tablo C'den 10 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'luk alanın ±2.228 değerinden başladığı görülür. 50 serbestlik dereceli t-dağılımında ise %2.5'lik alan 2.008 değerinden başlar. Serbestlik derecesi arttıkça t-dağılımını meydana getiren t-değerleri arasındaki değişim azaldığından, 5, 10 ve 50 serbestlik dereceli t-dağılımlarında %2,5'luk alanının başladığı t-değerleri giderek küçülmektedir.

Serbestlik derecesinin sonsuz olması durumunda %2,5'luk alan 1.96 değerinden %5'lik alan ise 1.645 değerinden başlamaktadır. Bu da serbestlik derecesi arttıkça t-dağılımının Z-dağılımına yaklaştığını ve sonsuz serbestlik derecesinde iki dağılımın çakıştığını göstermektedir.

8.3. Ortalamaya ait Hipotez Kontrolü

Normal dağılım gösteren bir populasyondan tamamen tesadüfen alındığı ileri sürülen bir örnekten hesaplanan ortalama ile populasyonun bilinen ortalaması arasındaki farkın tesadüften ileri gelip gelmediğine ortalamaya ait hipotez kontrolü yapılarak karar verilir. Üzerinde çalışılan populasyonun varyansı bilinmiyorsa test dağılımı olarak t-dağılımı kullanılır ve test istatistiği olarak da t-değeri hesaplanır.

ÖRNEK 1:

Sarıkuyruk balığı yetiştiriciliğinde kullanılan yemlerin yapısındaki protein oranının ortalama %22 olması gerektiği bildirilmiştir. Bu balık çeşidi için yem üreten bir yem fabrikasından tesadüfen seçilen 31 adet yem örneğinde protein oranı ortalamasının %20 ve standart sapmasının da %5 olduğu tespit edilmiştir. Acaba söz konusu fabrikada üretilen yemler Sarıkuyruk balığı yetiştiriciliği için uygun protein oranını içermekte midir?

Yapılan bu çalışmada araştırıcının amacı, söz konusu yem fabrikasında üretilen yemlerin protein içeriklerinin Sarıkuyruk balığı yetiştiriciliği için uygun olup olmadığına karar vermektir. Bu kararın verilebilmesi için hipotez kontrolü yapılması gerekir.

Burada araştırıcının yapması gereken hipotez kontrolü, ortalamaya ait hipotez kontrolüdür. Sarıkuyruk balık yetiştiriciliğinde kullanılan yemlerin yapısındaki ortalama protein miktarının %22 olması gerektiği bildirilmiş, fakat protein oranları arasındaki değişim için varyansın, yani populasyon varyansının ne olduğu verilmemiştir. Populasyon varyansının bilinmediği durumlarda hipotez kontrolünde kullanılması gereken test dağılımı, t-dağılımı ve hesaplanması gereken test istatistiği de t-değeridir.

Söz konusu yem fabrikasında üretilen yemlerin protein içeriklerinin Sarıkuyruk balığı yetiştiriciliği için uygun olup olmadığına karar vermek için uygulanacak hipotez kontrolünde, aşağıdaki gibi hipotez takımının oluşturulması gerekir.

H_0: Populasyon ile örnek ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir. Gözlenen %2'lik fark istatistik olarak önemli değildir ve sıfır kabul edilebilir. Yani söz konusu fabrikada üretilen yemlerin Sarıkuyruk balığı yetiştiriciliği için uygun protein oranını içerdiği söylenebilir. Kısaca, μ_x=%22'dir.

H_1: Populasyon ile örnek ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir. Gözlenen %2'lik fark istatistik olarak önemlidir ve sıfır kabul edilemez. Yani söz konusu fabrikada üretilen yemlerin Sarıkuyruk balığı yetiştiriciliği için uygun protein oranını içerdiği söylenemez. Kısaca, $\mu_x \neq$%22'dir.

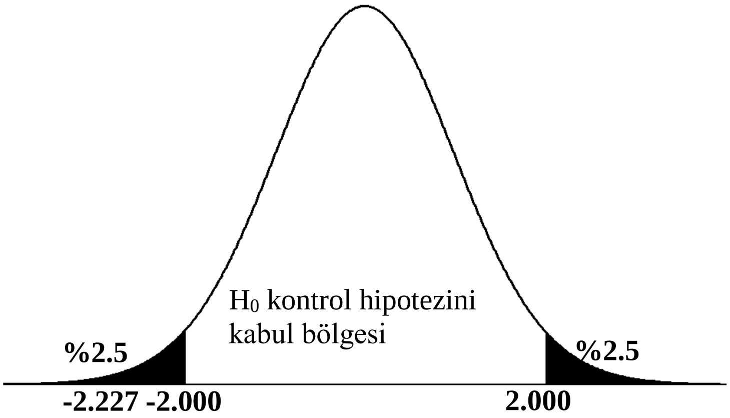
Hipotez kontrolünün çift taraflı yapılması gerekmektedir. Çünkü söz konusu fabrikada üretilen yemlerin Sarıkuyruk balık yetiştiriciliğine uygun olması için üretilen yemin protein oranının, önerilen protein oranından ne az ne de çok olmamalıdır. Yani araştırıcı, 31 yem örneğindeki ortalama protein oranının, populasyona ait ortalamadan küçük veya büyük oluşu ile değil sadece farklı olup olmadığı ile ilgilenmektedir.

Fabrikada üretilen yemlerin protein oranı, ortalaması %22 olan normal dağılım gösteriyor ise bu fabrikadan 31 yem örneği içeren çok sayıda örnekler alınsa ve ortalamaları hesaplansa, hesaplanan bu ortalamalar örnekten örneğe değişerek bir dağılım gösterir. Bu dağılıma, ortalamalara ait örnekleme dağılımı adı verilir. Bu dağılımın parametreleri, $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$ = %22 ve standart sapması da (5.2) numaralı eşitlikten $S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{31}}$ =0.898 olarak örnekten tahmin edilir.

Üretilen yemlerin Sarıkuyruk balık yetiştiriciliği için uygun olup olmadığına karar vermek için yapılacak hipotez kontrolünde test dağılımı olarak t-dağılımı ve test istatistiği olarak da t-değeri kullanılır. Örnekten hesaplanan ortalamaya karşılık gelen t-değeri (8.1) numaralı eşitlikten;

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_x}{S_{\bar{x}}} = \frac{(20-22)}{0.898} = -2.227 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Hesaplanan test istatistiği (n-1) = (31-1) = 30 serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir. I. tip hata olasılığı, α=%5 olarak belirlenmiş ise çift taraflı hipotez kontrolü yapıldığından I. tip hata olasılığının yarısı (%2.5), ortalamadan büyük değerlerin bulunduğu, diğer yarısı (%2.5) ise ortalamadan küçük değerlerin bulunduğu tarafta alınır. Tablo C'den 30 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'luk alan 2.00 değerinden başladığından test dağılımında, kontrol hipotezinin kabul ve ret bölgeleri Şekil 8.1'de görüldüğü gibi belirlenir.



Şekil 8.1. 35 serbestlik dereceli t-dağılımında çift taraflı hipotez kontrolünde ret ve kabul bölgeleri

Şekil 8.1'de siyah taralı alanlar H_0 hipotezinin ret bölgeleridir. Yapılan hipotez kontrolünde test istatistiği -2.227 olarak hesaplanmıştır. Hesaplanan bu test istatistiği H_0 hipotezinin ret bölgesine, yani taralı alana düştüğü için kontrol hipotezi ret edilir ve söz konusu fabrikada üretilen yemlerin Sarıkuyruk balık yetiştiriciliği için uygun olmadığı kararına varılır.

ÖRNEK 2:

Meyve suyu üretimi yapan bir fabrikada üretilen portakal sularında C vitamini ortalamasının 17 mg/L olduğu bildirilmiştir. Yeni bir üretim yöntemi kullanılarak üretilen portakal sularından tesadüfen 16 şişe alınmış ve C vitamini ortalaması 17.9 mg/L, standart sapması da 3 mg/L olarak bulunmuştur. Yeni üretim yönteminin portakal sularındaki C-vitamini miktarını artırdığı söylenebilir mi?

Meyve suyu fabrikasında yapılan araştırmanın amacı, önerilen yeni üretim yönteminin kullanılan yöntemden daha iyi olup olmadığının, yani üretilen portakal sularındaki C-vitamini miktarını artırıp artırmadığının araştırılmasıdır. Önerilen yeni yöntemin daha iyi olduğunun söylenebilmesi için yeni yöntem kullanılarak üretilen meyve sularındaki ortalama C-vitamini miktarının, halen kullanılan yöntem için bildirilen ortalamadan daha büyük olması gerekir. Bu sebeple tek taraflı hipotez kontrolü uygulanmalıdır.

Yeni üretim yönteminin daha iyi bir üretim yöntemi olup olmadığına karar vermek için uygulanan hipotez kontrolü Tablo 8.1'de verilmiştir.

Tablo 8.1. Yeni üretim yönteminin daha iyi bir üretim yöntemi olup olmadığına karar vermek için uygulanan hipotez kontrolü

H_0: Populasyon ile örnek ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir. Gözlenen 0.9 mg/L'lik C-vitamini farkı istatistik olarak önemli değildir. Yeni üretim yönteminin daha iyi bir yöntem olduğu söylenemez. Kısaca, μ_x=17 mg/L'dir.

H_1: Populasyon ile örnek ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir. Gözlenen 0.9 mg/L'lik C-vitamini farkı istatistik olarak önemlidir. Yeni üretim yönteminin daha iyi bir yöntem olduğu söylenebilir. Kısaca, μ_x >17 mg/L'dir.

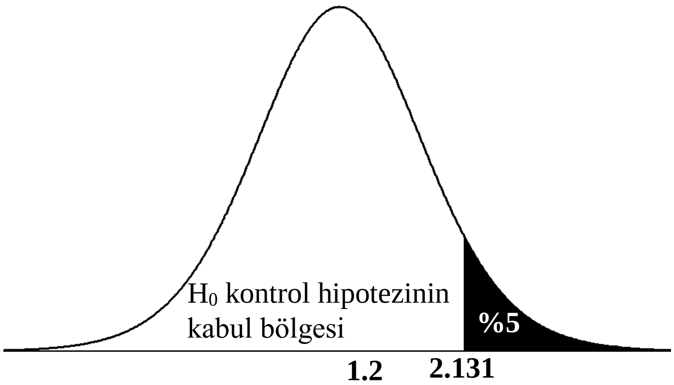
Meyve suyu fabrikasında çok sayıda 16 şişelik portakal suları yeni yöntem ile üretilse ve C-vitamini miktarı ortalamaları hesaplansa hesaplanan bu ortalamalar, $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$=17 mg/L ve standart sapması da (5.2) numaralı eşitlikten $S_{\bar{x}} = \dfrac{3}{\sqrt{16}}$=0.75 mg/L olan normal dağılım gösterir.

Hipotez kontrolünde test dağılımı olarak t-dağılımı ve test istatistiği olarak da t-değeri kullanılır. Örnekten hesaplanan ortalamaya karşılık gelen t-değeri (8.1) numaralı eşitlikten;

Tablo 8.1 devam

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_x}{S_{\bar{x}}} = \frac{(17.9-17)}{0.75} = 1.2 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Hesaplanan test istatistiği (16-1)=15 serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir. I. tip hata olasılığı, α=%5 olarak belirlenmiş ise tek taraflı hipotez kontrolü yapıldığında I. tip hata olasılığı, test dağılımının sağ tarafında, yani ortalamadan büyük t değerlerinin bulunduğu tarafta alınır. Tablo C'den 15 serbestlik dereceli t-dağılımında %5'lik alan 2.131 değerinden başladığından test dağılımında kontrol hipotezinin kabul ve ret bölgeleri Şekil 8.2'deki gibi belirlenir.



Şekil 8.2. 15 serbestlik dereceli t-dağılımında tek taraflı hipotez kontrolünde kontrol hipotezinin ret ve kabul bölgeleri

Yapılan hipotez kontrolünde test istatistiği 1.2 olarak hesaplandığından bu değer Şekil 8.2'de görüldüğü gibi kontrol hipotezinin kabul bölgesinde kalmaktadır. Bu sebeple H_0 hipotezi kabul edilir.

Meyve suyu fabrikasında yapılan araştırmada, Tablo 8.1'de uygulanan hipotez kontrolü sonunda yeni üretim metodu ile kullanılmakta olan üretim metodu arasındaki farkın tesadüfen ileri geldiğine karar verilmiştir. Bu durumda, yeni üretim yönteminin üretilen portakal sularındaki C-vitamini miktarını artırdığı söylenemez. Hipotez kontrolü sonunda verilen karar doğrultusunda fabrika yetkililerinin halen kullanılmakta olan üretim metodunu kullanmaya devam etmeleri daha akılcı olacaktır.

ÖRNEK 3:

Belirli bir rasyonla beslenen sakız ırkı koyunlarda laktasyon süt verimi ortalamasının 150 kg (μ = 150 kg) olduğu bilinmektedir. Yeni bir rasyon, 30 adet sakız ırkı koyunda denenmiş ve laktasyon süt verimi ortalaması 165 kg, standart sapması da 35 kg olarak bulunmuştur. Kullanılan yeni rasyon, sakız ırkı koyunlarda laktasyon süt verimini artırmış mıdır?

Yeni rasyonun laktasyon süt verimini artırıp artırmadığına karar vermek için tek taraflı hipotez kontrolü Tablo 8.2'de görüldüğü gibi uygulanır.

Tablo 8.2. Yeni rasyonun laktasyon süt verimini artırıp artırmadığına karar vermek için yapılacak hipotez kontrolü

H_0: Populasyon ile örnek ortalaması arasında gözlenen 15 kg'lık fark tesadüften ileri gelmiştir ve istatistik olarak önemli değildir. Bu sebeple, hazırlanan yeni rasyonun sakız ırkı koyunlarda laktasyon süt verimi ortalamasını artırdığı söylenemez. Kısaca, μ_x=150kg'dır.

H_1: Populasyon ile örnek ortalaması arasında gözlenen 15 kg'lık fark tesadüften ileri gelmemiştir. Bu sebeple, hazırlanan yeni rasyonun sakız ırkı koyunlarda laktasyon süt verimi ortalamasını artırdığı söylenebilir. Kısaca, μ_x>150kg'dır.

30 bireylik örneklerden hesaplanacak laktasyon süt verimi ortalamaları, $\mu_{\bar{x}} = \mu_x = 150$ kg ve standart sapması da (5.2) numaralı eşitlikten $S_{\bar{x}} = \frac{35}{\sqrt{30}}$ ≅6.39 kg olan normal dağılım gösterir.

Hipotez kontrolünde test dağılımı olarak t-dağılımı ve test istatistiği olarak da t-değeri kullanılır. Örnekten hesaplanan ortalamaya karşılık gelen t-değeri (8.1) numaralı eşitlikten;

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_x}{S_{\bar{x}}} = \frac{(165-150)}{6.39} = 2.347 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Tablo 8.2 devam

Hesaplanan test istatistiği (30-1)=29 serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir. I. tip hata olasılığı, α=%5 olarak belirlenmiş ise tek taraflı hipotez kontrolü yapıldığı için I. tip hata olasılığı, test dağılımının sağ tarafında, yani ortalamadan büyük t değerlerinin bulunduğu tarafta alınır.

Tablo C'den 29 serbestlik dereceli t-dağılımında %5'lik alanın, yani kontrol hipotezinin ret edildiği kritik bölgenin 1.699 değerinden başladığı görülmektedir. Yapılan hipotez kontrolünde test istatistiği 2.347 olarak hesaplandığından, bu değer kontrol hipotezinin ret edildiği kritik bölgenin başladığı değerden büyüktür. Bu sebeple, H_0 hipotezi ret edilerek, hazırlanan yeni rasyonun sakız ırkı koyunlarda laktasyon süt verimi ortalamasını artırdığı kararına varılır.

Uygulanan hipotez kontrolü sonunda araştırıcı kararını hem α=0.05 hem de α=0.01 seviyesinde verebilir. Hipotez kontrolünde α=0.05 seviyesinde kontrol yapılarak farkın istatistik olarak önemli olduğuna karar verilirse bu önemlilik tek yıldız, "*****" ve I. tip hata olasılığının da %5'ten az olduğu "**p<0.05**" şeklinde belirtilir.

Araştırıcı, %5 seviyesinde kararını verdikten sonra isterse %1 seviyesinde de kontrol yaparak karar verebilir. Tablo 8.2'de uygulanan hipotez kontrolünde α=0.01 seviyesinde karar vermek için 29 serbestlik dereceli t-dağılımında %1'lik alanın başladığı t değeri Tablo C'den 2.462 olarak bulunur. Hesaplanan test istatistiğinin değeri 2.347 , 2.462 değerinden küçük olduğundan H_0 hipotezinin kabul bölgesinde kalır. Hipotez kontrolü %1 seviyesinde yapıldığı zaman kontrol hipotezi kabul edilerek yeni rasyonun sakız ırkı koyunlarda laktasyon süt verimi ortalamasını artırmadığı kararına varılacaktır. Görüldüğü gibi %5 seviyesinde ret edilen kontrol hipotezi %1 seviyesinde kabul edilmiştir.

Yapılan bir hipotez kontrolünde, kontrol hipotezi %1 seviyesinde ret edilirse, farkın istatistik olarak önemli olduğu çift yıldız, "******" ile gösterilir ve I. tip hata olasılığının da %1'den az olduğu "**p<0.01**" şeklinde belirtilir.

8.4. Ortalamaya ait Hipotez Kontrolünde Örnek Genişliği

Eğer 8.1 numaralı bölümde açıklandığı gibi ortalamaya ait t-testi yapılmak isteniyorsa bu durumda araştırıcı, uygulanan hipotez kontrolü sonunda varılacak kararın güvenilirliği için belirlenen bir testin gücü ve fark ile örnek genişliğinin en az ne olması gerektiğini bilmek ister.

Populasyon varyansının (σ^2'nin) tahmini S^2 hesaplanmış ise örnek genişliği (n) tahmin edilebilir. Araştırıcı t-testini önceden belirlenen bir I. tip hata olasılığı (α) ve II. tip hata olasılığı (β) ile uygulamak ve populasyon ortalaması ile örnek ortalaması arasındaki farkın δ olarak belirlenmesi halinde; α yanılma seviyesinde t-testini 1-β güç ile populasyon ortalaması ile örnek ortalaması arasındaki farkı da δ olarak belirlemek için gerekli olan en az örnek genişliği (8.3) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanabilir.

$$n = \frac{S^2}{\delta^2}\left(t_{(\alpha,\, sd)} + t_{(\beta,\, sd)}\right)^2 \qquad ...(8.3)$$

(8.3) numaralı eşitlikte, sd, serbestlik derecesidir ve hesaplanacak olan örnek genişliğine bağlıdır. (8.3) numaralı eşitlik kullanılarak örnek genişliği tahmini yapılırken, örnek varyansı olan S^2, populasyon varyansının örnek genişliği yeteri kadar büyük (30 veya daha fazla birey içeren) bir örnekten hesaplanmış tahmini ise (8.3) numaralı eşitlik kullanılarak yapılacak örnek genişliği tahmini daha güvenilir olur.

Örnek genişliğinin tahmini Bölüm 8.3'de ÖRNEK 1 için Tablo 8.3'de verilmiştir.

Tablo 8.3. Bölüm 8.3'de ÖRNEK 1 için örnek genişliğinin tahmini

Araştırıcı 31 adet yem örneğinde protein oranı ortalamasını $\overline{X} = \%20$ ve standart sapmasını S_x=%5 olarak hesaplamıştır. Bu durumda protein oranına ait varyans, $S_x^2 = 25$'dir. Sarıkuyruk balığı yetiştiriciliği için uygun protein oranı %20 olarak bildirildiğine göre kontrol hipotezini ret etmek için gerekli örnek genişliği tahmin edilmek istenmektedir.

Burada yapılan hipotez kontrolü çift taraflı hipotez kontrolüdür. Eğer hipotez kontrolünün α=%5 seviyesinde çift taraflı olarak ve örnekten hesaplanan ortalama ile populasyon ortalaması arasındaki 3 birimlik farkı %95 olasılık (1-β=0.95) ile saptaması isteniyorsa örnek genişliği (8.3) numaralı eşitlik kullanılarak aşağıdaki şekilde tahmin edilir:

Tablo 8.3 devam.

Populasyon varyansı n=31 yem örneğinden tahmin edildiği için t-dağılımının sd=(31–1)=30'dur ve Tablo C'den $t_{(0.025,\ 30)}=2.042$ ve $t_{(0.05,\ 30)}=1.697$ olarak bulunur. Bu durumda;

$$n = \frac{25}{3^2}(2.042 + 1.697)^2 = 38.83 \cong 38 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Tahmin edilen örnek genişliği kullanılarak örnek genişliği yine tahmin edilirse sd=38-1=37'dir ve $t_{(0.025,\ 37)}=2.026$ ve $t_{(0.05,\ 37)}=1.687$'dir. Bu durumda;

$$n = \frac{25}{3^2}(2.026+1.687)^2 = 38.29 \cong 38 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Yapılan örnek genişliği tahminleri örnekten hesaplanan ortalama ile populasyon ortalaması arasındaki 3 birimlik farkı %95 olasılık (1-β=0.95) ile saptamak için en az 38 yem örneğinin gerektiğini göstermiştir.

8.5. Ortalamalar arası Farka ait Hipotez Kontrolü

8.5.1. Bağımsız İki Grubun Karşılaştırılması

Üzerinde çalışılan özelliğe etki bakımından iki muamele grubu ortalamaları arasındaki farkın tesadüfi olup olmadığının araştırılması gerekebilir. Çalışılan özelliğe etki bakımından iki muamele grubu arasındaki fark tesadüften ileri geliyorsa grupların, ortalaması μ_x olan populasyondan tesadüfen alınmış iki örnek olduğu ve grup ortalamaları arasındaki farkın sıfır kabul edilebileceği söylenir. Örneklerin tesadüfen alındığı populasyonun varyansı hakkında çoğu zaman bilgi yoktur ve üzerinde çalışılan örneklerden tahmin edilir. Varyansı bilinmeyen bir populasyondan iki tesadüf örneği alınarak her birinin varyansları hesaplansa, populasyon varyansının en iyi tahmini bu örnek varyanslarının tartılı ortalaması, yani toplanmış varyans olacaktır. Toplanmış varyansın güvenilir bir tahmin olabilmesi için örnek varyansları arasındaki fark, ancak tesadüften ileri gelecek kadar olmalıdır. Bir başka deyişle örnek varyanslarının homojen olması gerekir. Grup varyanslarının homojenlik kontrolü Bölüm 9'da açıklanacaktır.

Yapılan bir çalışmada dikkate alınan gruplardan populasyon varyansı tahmin edildikten sonra grup ortalamaları arasındaki farkın tesadüfi olup olmadığı, ortalamalar arası farka ait hipotez kontrolü yapılarak kontrol edilebilir. Populasyonun varyansı örneklerden tahmin edildiği için hipotez kontrolünde kullanılacak test dağılımı t-dağılımı ve hesaplanacak test istatistiği de t-değeridir. Grup ortalamaları arasındaki farka ait hipotez kontrolünde t-değeri (8.4) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

$$t = \frac{(\mu_{\bar{A}} - \mu_{\bar{B}}) - \mu_D}{S_D} \qquad \ldots(8.4)$$

(8.2) numaralı eşitlikte S_D (5.7) numaralı eşitlik kullanılarak

$$n_A \neq n_B \text{ ise } S_D = \sqrt{\frac{\sum d_A^2 + \sum d_B^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1)} \cdot \frac{(n_A + n_B)}{(n_A n_B)}}$$

$$n_A = n_B = n \text{ ise } S_D = \sqrt{S_{\bar{A}}^2 + S_{\bar{B}}^2}$$

şeklinde hesaplanır. (8.2) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanan t-değeri Serbestlik Derecesi=[(n_A-1)+(n_B-1)] olan t-dağılımı gösterir.

ÖRNEK 1:

Uykusuzluktan şikâyetçi 25 hastadan tesadüfen seçilen 10 tanesine A uyku ilacı, 15 tanesine de B uyku ilacı verilmiştir. Bu uygulamadan sonra söz konusu hasta gruplarının uyku süresi (saat) ortalamaları ve standart hataları sırası ile $\bar{A} \pm S_{\bar{A}}$ = 3.5 ± 0.70 ve $\bar{B} \pm S_{\bar{B}}$ = 4.5± 0.90 olarak bulunmuştur. Bu değerlere göre B ilacının uykusuzluğa karşı daha etkili olduğu söylenebilir mi?

Bu araştırmanın amacı, uykusuzluk şikayeti olan hastaların uyku süresine etki bakımından B ilacının A ilacından daha etkili olup olmadığının araştırılmasıdır. B ilacının daha etkili olduğunun söylenebilmesi için B ilacı verilen hastaların ortalama uyku sürelerinin, A ilacı verilen hastaların uyku sürelerinden daha uzun olması gerekir. Bu da yapılacak hipotez kontrolünün tek taraflı olduğunu gösterir. Bu duruma ilişkin hipotez takımı aşağıdaki gibi oluşturulur.

H_0: A ve B ilaçlarının ortalama uyku süreleri arasında gözlenen fark tesadüften ileri gelmektedir. B ilacının uykusuzluğa karşı daha etkili olduğu söylenemez. Kısaca $\mu_{\bar{A}} - \mu_{\bar{B}} = 0$ veya $\mu_{\bar{A}} = \mu_{\bar{B}}$'dir.

H_1: A ve B ilaçlarının ortalama uyku süreleri arasında gözlenen fark tesadüften ileri gelmemektedir. B ilacının uykusuzluğa karşı daha etkili olduğu söylenebilir. Kısaca $\mu_{\bar{B}} - \mu_{\bar{A}} > 0$ veya $\mu_{\bar{B}} > \mu_{\bar{A}}$'dir.

Kontrol hipotezi doğru ise hastaların ortalama uyku süresi bakımından A ve B ilaçları arasında gözlenen fark, ortalaması sıfır ve standart sapması (5.7) numaralı eşitlikte verildiği gibi olan normal dağılım gösterir.

(5.7) numaralı eşitlik kullanılarak ortalamalar arası farka ait standart hatanın hesaplanabilmesi için verilen bilgilerden yararlanarak grupların kareler toplamları hesaplanmalıdır.

$n_A = 10 \qquad \bar{A} \pm S_{\bar{A}} = 3.5 \pm 0.70$

$n_B = 15 \qquad \bar{B} \pm S_{\bar{B}} = 4.5 \pm 0.90$

Yapılan araştırmada A ve B gruplarının ortalaması ve ortalamanın standart hatası verilmiştir. Ortalamaların standart hatalarından kareler toplamları aşağıdaki şekilde hesaplanır. (5.2) numaralı eşitlikten standart hata;

$S_{\bar{A}} = \dfrac{S_A}{\sqrt{n_A}}$ dır.

(5.2) numaralı eşitlikten A grubunun varyansı;

$(S_{\bar{A}})^2 = (\dfrac{S_A}{\sqrt{n_A}})^2 = S_A^2 = S_{\bar{A}}^2.n$ şeklinde yazılabilir.

(2.13) numaralı eşitlikten, varyansın $S_A^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_A}(A_i - \bar{A})^2}{(n_A - 1)} = \dfrac{\sum d_A^2}{(n_A - 1)}$ olduğu bilindiğine göre A grubunun kareler toplamı $\sum d_A^2 = S_{\bar{A}}^2.n_A.(n_A - 1)$ şeklinde, B grubunun kareler toplamı da $\sum d_B^2 = S_{\bar{B}}^2.n_B.(n_B - 1)$ şeklinde hesaplanır.

A ve B uyku ilacı alan hasta gruplarının uyku sürelerine ait kareler toplamları ve uyku süreleri ortalamaları arasındaki fark için t-değeri (8.4) numaralı eşitlikten ,

$\sum d_A^2 = (0.7)^2.10.(10-1) = 44.1$

$\sum d_B^2 = (0.9)^2.15.(15-1) = 170.1$ olarak bulunur.

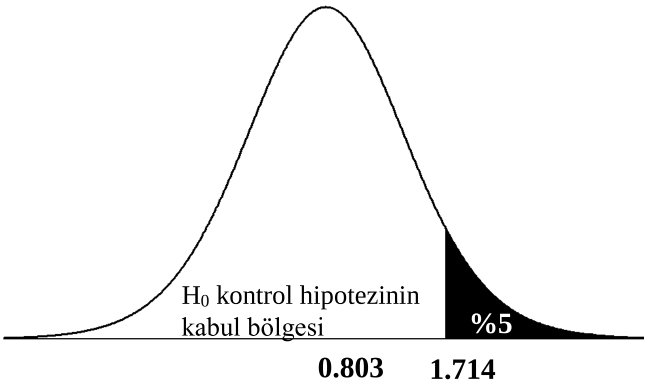
Bu değerler ile (5.7) numaralı eşitlikten ortalamalar arası farka ait standart hata;

$$S_D = \sqrt{\frac{44.1 + 170.1}{(10-1)+(15-1)} \frac{10+15}{(10)(15)}} \cong 1.246$$

ve (8.4) numaralı eşitlikten t-değeri;

$t = \dfrac{4.5 - 3.5}{1.246} \cong 0.803$ olarak bulunur.

Uykusuzluk şikayeti olan hastaların uyku süresine etki bakımından B ilacının A ilacından daha etkili olup olmadığının araştırılması için uygulanan hipotez kontrolünde I. tip hata olasılığı önceden (α=0.05) %5 olarak belirlenmiş ise yapılan hipotez kontrolü tek taraflı olduğundan bu olasılığın tamamı ortalamadan büyük değerlerin bulunduğu tarafta alınır. Tablo C'den [(10-1)+(15-1)]=23 serbestlik dereceli t-dağılımında %5'lik alanın 1.714 değerinden başladığı bulunur. Böylece Şekil 8.3'de görüldüğü gibi kontrol hipotezinin ret bölgesinin 1.714 değerinden başladığı belirlenmiş olur.



Şekil 8.3. 23 serbestlik dereceli t-dağılımında tek taraflı hipotez kontrolünde kontrol hipotezinin ret ve kabul bölgeleri

Şekil 8.3'te görüldüğü gibi örnekten hesaplanan ortalamalar arası farka karşılık gelen t-değeri, yani test istatistiği olan 0.803 değeri, 1.714 değerinden küçük olup kontrol hipotezinin kabul bölgesine düşmektedir. Dolayısıyla, $t_{Hesaplanan} < t_{tablo}$ (0.803 < 1.714) olduğundan kontrol hipotezi kabul edilir. Yapılan hipotez kontrolü sonunda uykusuzluk şikayeti olan hastaların uyku süresine etki bakımından B ilacının A ilacından daha etkili olmadığı ve uyku süresine etki bakımından bu ilaçların birbirinden farksız olduğu kararına varılır.

ÖRNEK 2:

A ve B firmaları tarafından üretilen meyve sularındaki pH değerlerine ilişkin ortalama, standart sapma ve gözlem adedi aşağıdaki gibidir. Bu değerlere göre A ve B firmalarının üretmiş oldukları meyve sularında pH değerleri bakımından istatistik olarak önemli bir farkın olduğu söylenebilir mi?

Firmalar	Ortalama	Standart sapma	Gözlem sayısı
A	7.55	0.024	5
B	7.49	0.032	5

Meyve suyu fabrikalarında üretilen meyve sularındaki pH değerleri standartlar ile belirlenmiş ise fabrikalar arasında üretilen meyve sularındaki pH değeri bakımından fark tesadüften ileri gelmelidir. Bu araştırmada, A ve B firmalarının üretmiş oldukları meyve sularında pH değerleri ortalamaları arasındaki farkın istatistik olarak önemli olup olmadığının araştırılması amaçlanmıştır. Dolayısıyla bunun için ortalamalar arası farka ait çift taraflı hipotez kontrolü yapılması gerekir.

A ve B firmalarının ürettikleri meyve sularının ortalama pH değerleri arasındaki farkın önemli olup olmadığına karar vermek için (8.4) numaralı eşitlik kullanılarak t-değerinin hesaplanması gerekir. (8.4) numaralı eşitlikten t-değerinin hesaplanabilmesi için önce A ve B firmalarının pH değeri ortalamalarına ait standart hatalar bulunur, (5.7) numaralı eşitlikten ortalamalar arası farka ait standart hata ve (8.4) numaralı eşitlikten de t-değeri hesaplanarak hipotez kontrolü tamamlanır ve karar verilir.

A ve B firmalarının üretmiş oldukları meyve sularında ortalama pH değerleri arasındaki farkın istatistik olarak önemli olup olmadığının belirlenmesi için uygulanan hipotez kontrolü Tablo 8.4'de verilmiştir.

Tablo 8.4. A ve B firmalarının üretmiş oldukları meyve sularında ortalama pH değerleri arasındaki farkın istatistik olarak önemli olup olmadığının belirlenmesi için uygulanan hipotez kontrolü

H_0: A ve B firmalarının üretmiş oldukları meyve sularında ortalama pH değerleri arasındaki 0.06 birimlik fark tesadüften ileri gelmiştir. Bu fark sıfır kabul edilebilir ve istatistik olarak önemli değildir. İki firma arasında pH değerleri bakımından bir fark olduğu söylenemez. Kısaca $\mu_{\bar{A}} - \mu_{\bar{B}} = 0$ veya $\mu_{\bar{A}} = \mu_{\bar{B}}$'dir.

H_1: A ve B firmalarının üretmiş oldukları meyve sularında ortalama pH değerleri arasındaki 0.06 birimlik fark tesadüften ileri gelmemiştir. Bu fark sıfır kabul edilemez ve istatistik olarak önemlidir. İki firma arasında pH değerleri bakımından bir fark olduğu söylenebilir. Kısaca $\mu_{\bar{A}} - \mu_{\bar{B}} \neq 0$ veya $\mu_{\bar{A}} \neq \mu_{\bar{B}}$'dir.

n_A=5, S_A=0.024 ise (5.2) numaralı eşitlikten $S_{\bar{A}} = \dfrac{0.024}{\sqrt{5}} = 0.0107$ ve

n_B=5, S_B=0.032 ise (5.2) numaralı eşitlikten $S_{\bar{B}} = \dfrac{0.032}{\sqrt{5}} = 0.0143$ olarak

bulunur. (5.7) numaralı eşitlikten ortalamalar arası farka ait standart hata;

$$S_D = \sqrt{(0.0107)^2 + (0.0143)^2} = 0.0179$$

ve (8.4) numaralı eşitlikten de t-değeri;

$$t = \frac{7.55 - 7.49}{0.0179} \cong 3.352 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Hesaplanan test istatistiği [(5-1)+(5-1)]=8 serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir. Araştırıcı I. tip hata olasılığını α=0.01 olarak belirlemiş ise çift taraflı hipotez kontrolü yapıldığı için I. tip hata olasılığının yarısı ortalamadan küçük ve diğer yarısı ise ortalamadan büyük t değerlerin bulunduğu tarafta alınır. Tablo C'den, 8 serbestlik dereceli t-dağılımında %0.5'lik alanının, yani kontrol hipotezinin ret bölgesinin 3.355 değerinden başladığı görülür. Hesaplanan test istatistiğinin değeri 3.352, kritik bölgenin başladığı t-değerinden (3.355) küçük olup H_0 hipotezinin kabul bölgesine düşmektedir. Bu sebeple de kontrol hipotezi kabul edilir ve firmalar arasında üretilen meyve sularındaki ortalama pH değeleri arasındaki farkın istatistik olarak önemli olmadığı kararına varılır.

Tablo 8.4'te verilen hipotez kontrolünde test istatistiğinin değeri t-dağılımı değerine çok yakın çıkmıştır. Bazı durumlarda uygulanan hipotez kontrolünde hesaplanan test istatistiğinin değeri ile test dağılımında kritik bölgenin başladığı değer aynı olabilir. Hesaplanan test istatistiğinin değeri, kritik alanın başladığı tablo değerine eşit veya büyükse kontrol hipotezinin ret edilmesi gerekmektedir.

ÖRNEK 3:

Keçi ve inek sütlerinde 100 mililitredeki kalsiyum (Ca) miktarları gr olarak aşağıdaki gibi bulunmuştur. Keçi sütündeki kalsiyum (Ca) miktarının inek sütündeki kalsiyum (Ca) miktarından daha fazla olduğu söylenebilir mi?

Keçi Sütü Ca (mL)	142	141	140	139	145
İnek Sütü Ca (mL)	120	122	127	130	

Bu çalışmada, keçi sütündeki kalsiyum miktarının inek sütündeki kalsiyum miktarından daha fazla olup olmadığı araştırılmaktadır. Keçi sütündeki kalsiyum miktarının inek sütündeki kalsiyum miktarından fazla olup olmadığına karar vermek için ortalamalar arası farka ait tek taraflı hipotez kontrolü yapılmalıdır.

Tablo 8.5. Keçi sütündeki kalsiyum miktarının inek sütündeki kalsiyum miktarından daha fazla olup olmadığını araştırmak üzere uygulanan hipotez kontrolü

H$_0$: Keçi ve inek sütleri arasında 100 mL'deki Ca miktarları bakımından gözlenen fark tesadüften ileri gelmektedir. Bu fark sıfır kabul edilebilir ve istatistik olarak önemli değildir. Keçi ve inek sütleri arasında Ca miktarı bakımından fark olduğu söylenemez. Kısaca $\mu_{\bar{K}} - \mu_{\bar{I}} = 0$ veya $\mu_{\bar{K}} = \mu_{\bar{I}}$'dir.

H$_1$: Keçi ve inek sütleri arasında 100 mL'deki Ca miktarları bakımından gözlenen fark tesadüften ileri gelmemektedir. Bu fark sıfır kabul edilemez ve istatistik olarak önemlidir. Keçi sütündeki kalsiyum miktarının inek sütündeki kalsiyum miktarından daha fazla olduğu söylenebilir. Kısaca $\mu_{\bar{K}} > \mu_{\bar{I}}$'dir.

Tablo 8.5 devam.

Keçi ve inek sütlerinde tayin edilen Ca miktarlarına ait ortalamalar ve kareler toplamları hesaplandıktan sonra (5.7) numaralı eşitlikten ortalamalar arası farka ait standart hata aşağıdaki şekilde bulunur.

Keçi sütü Ca (ml)	İnek sütü Ca (ml)
142	120
141	122
140	127
139	130
145	

$\bar{K} = 141.4$ $\quad \sum d_K^2 = 21.2$

$\bar{I} = 124.75$ $\quad \sum d_I^2 = 62.75$

Ortalamalar arası farka ait standart hata (5.7) numaralı eşitlikten $S_D = \sqrt{\frac{21.2 + 62.75}{(5-1)+(4-1)} \cdot \frac{(5+4)}{(5)(4)}} = 2.323$ ve test istatistiği (8.4) numaralı eşitlikten;

$$t = \frac{141.4\text{-}124.75}{2.323} \cong 7.168\text{dir.}$$

Hesaplanan test istatistiği [(5-1)+(4-1)]=7 serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir. Eğer araştırıcı I. tip hata olasılığını α=0.05 olarak belirlemiş ise tek taraflı hipotez kontrolü yapıldığı için I. tip hata ortalamadan büyük t değerlerinin bulunduğu tarafta alınır. Tablo C'den, 7 serbestlik dereceli t-dağılımında %5'lik alanının, yani kontrol hipotezinin ret bölgesinin 1.895 değerinden başladığı görülür. Hesaplanan test istatistiğinin değeri 7.168 olup kritik bölgenin başladığı t-değerinden büyüktür ve H_0 hipotezinin ret bölgesine düşmektedir. Bu sebeple kontrol hipotezi ret edilir ve keçi sütündeki kalsiyum miktarının inek sütündeki kalsiyum miktarından daha yüksek olduğu kararına varılır.

8.5.2. Bağımlı İki Grubun Karşılaştırılması

Bazı durumlarda, çalışılan iki gruptaki gözlemler birbirine bağımlı olabilir. Grupların birbirine bağımlı olması durumda her gruptaki gözlemler, aynı bireylerin farklı zaman veya koşullarda ölçülen değerleridir. İki grupta aynı bireyden ölçülen gözlemler birbirinin eşi niteliğindedir. Örneğin, herhangi bir hastalığın tedavisinde uygulanan tedavi yönteminin etkili olup olmadığının araştırılması için tedavi öncesi ve tedavi sonrasında aynı hastalardan gözlem yapılması, yöntemin etkinliğinin belirlenmesi için en doğru yoldur. Bu durumda iki grupta veri toplanan hastalar aynı hastalardır. Dolayısıyla gruplar birbirine bağımlıdır. Bir başka çalışmada ineklerde, sütteki yağ oranının yemlemeden önce ve yemlemeden sonra değişip değişmediği araştırılmak istenebilir. Bunun için aynı inekler hem yemlemeden önce hem de yemlemeden sonra sağılmalı ve sütlerindeki yağ oranı tayin edilmelidir. Bu durumda da yemlemeden önce ve yemlemeden sonra sağılan inekler aynı inekler olduğu için önce-sonra grupları birbirine bağımlıdır.

Birbirine bağımlı iki grubun karşılaştırılması için **Eş-yapma t-testi** uygulanır. Eş-yapma t-testinde, test dağılımı t-dağılımı ve test istatistiği t-değeri olup (8.5) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

$$t = \frac{\overline{D} - \mu_{\overline{D}}}{S_{\overline{D}}} \qquad \ldots(8.5)$$

(8.5) numaralı eşitlikte $\overline{D}$, eşler arası farkların ortalaması, $S_{\overline{D}}$, eşler arası farkların ortalamasına ait standart hatadır. (5.2) numaralı eşitlik kullanılarak;

$$S_{\overline{D}} = \frac{S_D}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\sum d_D^2}{(n-1)}}}{\sqrt{n}} \text{ olarak bulunur.}$$

(8.5) numaralı eşitlik yardımıyla hesaplanan test istatistiği (n-1) serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir.

ÖRNEK 1:

Toprak yıkama işleminin toprak pH'sı üzerine etkisini araştırmak üzere bir çalışma 5 parselde yürütülmüştür. Her bir parselde yıkamadan önce ve sonra pH değerleri ölçülmüş ve aşağıdaki gibi bulunmuştur.

Yıkama öncesi	3.05	3.45	3.95	4.05	5.00
Yıkama sonrası	7.05	5.65	5.85	6.45	7.00

Araştırıcı yıkama işleminin toprağın pH değerini artırıp artırmadığını araştırmak istemektedir. Yıkamadan önce ve sonra aynı parselin pH'sı ölçüldüğü için gruplardaki gözlemler aynı parselden elde edilmiştir ve iki grup birbirine bağımlıdır. Yıkama işleminin toprağın pH değerini artırıp artırmadığı **eş-yapma t-testi** kullanılarak kontrol edilmelidir.

Yıkama işlemenin toprağın pH değerini artırıp artırmadığını kontrol etmek için eş-yapma t-testi Tablo 8.6'da uygulanmıştır.

Tablo 8.6. Yıkama işlemenin toprağın pH değerini artırıp artırmadığını kontrol etmek için uygulanan eş-yapma t-testi

H_0: Yıkama işlemi öncesi ve sonrası ortalama pH değerleri arasındaki fark tesadüften ileri gelmiştir. Bu fark sıfır kabul edilebilir. Yıkama işlemi toprak pH'sını değiştirmemiştir. Kısaca $\mu_{\overline{D}} = 0$ 'dır.

H_1: Yıkama işlemi öncesi ve sonrası ortalama pH değerleri arasındaki fark tesadüften ileri gelme miştir. Bu fark sıfır kabul edilemez. Yıkama işlemi toprak pH'sını artırmıştır. Kısaca $\mu_{\overline{D}} > 0$ 'dır.

Uygulanacak hipotez kontrolünde karşıt hipotez $\mu_{\overline{D}} > 0$ şeklinde kurulmuştur. Yıkama işleminin toprak pH'sını artırıp artırmadığı araştırıldığı için yıkama sonrası pH değerlerinden yıkama öncesi pH değerleri çıkarılarak eşler arası farklar [D_i=(X_{2i}-(X_{1i})] bulunmuştur. (Bunun tersi de doğrudur. Yani, önce-sonra farkları ile de işlemler yapılabilir. Ancak bu durumda Fark ortalamalarının işaretinin değişeceği göz ardı edilmemelidir).

Yıkamadan önce(X_{1i})	Yıkamadan sonra (X_{2i})	D_i=(X_{2i}-(X_{1i})
3.05	7.05	4.0
3.45	5.65	2.2
3.95	5.85	1.9
4.05	6.45	2.4
5.00	7.00	2.0

$$\sum D_i = 12.5 \qquad \overline{D} = \frac{12.5}{5} = 2.5 \qquad \sum d_D^2 = 2.96$$

Yıkama öncesi ve sonrası pH değeri ölçülen parseller aynı parseller olduğu için test istatistiğinin (8.5) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanması gerekir.

Tablo 8.6 devam

(8.5) numaralı eşitlik kullanılarak test istatistiğinin hesaplanabilmesi için eşler arası farkların ortalamasına ait standart hata (5.2) numaralı eşitlikten;

$$S_{\overline{D}} = \frac{\sqrt{\frac{2.96}{(5-1)}}}{\sqrt{5}} = 0.385 \,,$$

ve (8.5) numaralı eşitlikten test istatistiği;

$$t = \frac{2.5}{0.385} \cong 6.494 \text{ olarak bulunur.}$$

Hesaplanan test istatistiği, n-1 = (5-1) = 4 serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir. Araştırıcı I. tip hata olasılığını α=0.05 olarak belirlemiş ise tek taraflı hipotez kontrolü yapıldığı için I. tip hata ortalamadan büyük t değerlerinin bulunduğu tarafta alınır. Tablo C'den, 4 serbestlik dereceli t-dağılımında %5'lik alanının, yani kontrol hipotezinin ret bölgesinin 2.132 değerinden başladığı görülür. Hesaplanan test istatistiğinin değeri 6.494 olup kritik bölgenin başladığı t-değerinden büyüktür ve H_0 hipotezinin ret bölgesine düşmektedir. Bu sebeple kontrol hipotezi ret edilir ve yıkama işlemenin toprağın pH değerini artırdığı kararına varılır.

ÖRNEK 2:

Herhangi bir dersten sınav stresinin öğrencilerin kanındaki adrenalin miktarı üzerine etkisini araştırmak için 7 öğrencide sınav öncesi ve sınavdan sonraki kandaki adrenalin miktarı (mg) aşağıdaki gibi bulunmuştur. Bu araştırmada sınavdan sonraki rahatlamanın kandaki adrenalin miktarını azaltıp azaltmadığının araştırılması amaçlanmıştır.

Sınav öncesi Adrenalin miktarı (mg)	40	45	50	52	54	53	55
Sınav sonrası Adrenalin miktarı (mg)	32	42	42	45	44	52	57

Sınav öncesi ve sınav sonrası kandaki adrenalin miktarı tespit edilen öğrenciler aynı öğrenciler olduğu için iki grup birbirine bağımlıdır ve tek taraflı eş-yapma t-testinin uygulanması gerekir.

Sınavdan sonraki rahatlamanın kandaki adrenalin miktarını azaltıp azaltmadığının araştırılması için eş-yapma t-testi Tablo 8.7'de uygulanmıştır.

Tablo 8.7. Sınavdan sonraki rahatlamanın kandaki adrenalin miktarını azaltıp azaltmadığının araştırılması için uygulanan eş-yapma t-testi

H_0: Sınav öncesi ve sınav sonrası gözlenen kandaki adrenalin miktarları arasındaki fark tesadüften ileri gelmiştir. Gözlenen farklar sıfır kabul edilebilir. Sınavdan sonraki rahatlamanın adrenalin miktarını azalttığı söylenemez. Kısaca $\mu_{\bar{D}} = 0$ 'dır.

H_1: Sınav öncesi ve sınav sonrası gözlenen kandaki adrenalin miktarları arasındaki fark tesadüften ileri gelmemiştir. Gözlenen farklar sıfır kabul edilemez. Sınavdan sonraki rahatlamanın adrenalin miktarını azalttığı söylenebilir. Kısaca $\mu_{\bar{D}} < 0$ 'dır.

Yapılan araştırmada sınavdan sonraki rahatlamanın adrenalin miktarını azaltıp azaltmadığı araştırıldığı için karşıt hipotez $\mu_{\bar{D}} < 0$ şeklinde kurulmuştur. Eğer sınavdan sonra adrenalin miktarı azalıyor ise sınav sonrası adrenalin miktarlarından sınav öncesi adrenalin miktarları çıkarıldığında elde edilen eşler arasındaki farkların sıfırdan küçük olması gerekir. Bu sebeple de sınav sonrası adrenalin miktarlarından sınav öncesi adrenalin miktarları çıkarılarak eşler arası farklar [$D_i=(X_{2i}-(X_{1i})$] aşağıdaki gibi bulunmuştur.

Öğrenciler	Sınavdan önce(X_{1i})	Sınavdan sonra (X_{2i})	$D_i=(X_{2i}-(X_{1i})$
1	40	32	-8
2	45	42	-3
3	50	42	-8
4	52	45	-7
5	54	55	1
6	53	52	-1
7	55	57	2

$$\sum D_i = -24 \qquad \bar{D} = \frac{-24}{7} \cong -3.429 \qquad \sum d_{\bar{D}}^2 = 109.71$$

Tablo 8.7 devam.

Sınavdan sonra rahatlamanın kandaki adrenalin miktarını azaltıp azaltmadığına karar vermek için test istatistiğinin (8.5) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanması gerekir.

(8.5) numaralı eşitlik kullanılarak test istatistiğinin hesaplanabilmesi için eşler arası farkların ortalamasına ait standart hata (5.2) numaralı eşitlikten;

$$S_{\bar{D}} = \frac{\sqrt{\frac{109.71}{(7-1)}}}{\sqrt{7}} = 1.616\ ,$$

ve (8.5) numaralı eşitlikten test istatistiği de;

$$t = \frac{-3.429}{1.616} \cong -2.122 \text{ olarak bulunur.}$$

Hesaplanan test istatistiği (7-1) =6 serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir. Araştırıcı I. tip hata olasılığını α=0.01 olarak belirlemiş ise tek taraflı hipotez kontrolü yapıldığı için I. tip hata, ortalamadan küçük t değerlerinin bulunduğu tarafta alınır. Tablo C'den, 6 serbestlik dereceli t-dağılımında %1'lik alanının, yani kontrol hipotezinin ret bölgesinin -2.998 değerinden başladığı görülür. Hesaplanan test istatistiğinin değeri -2.122 olup kritik bölgenin başladığı t-değerinden büyüktür ve H_0 hipotezinin kabul bölgesine düşmektedir. Bu sebeple kontrol hipotezi kabul edilir ve sınavdan sonraki rahatlamanın kandaki adrenalin miktarında meydana getirdiği değişikliğin tesadüften ileri geldiğine karar verilir.

ÖRNEK 3:

Yemleme öncesi ve yemleme sonrası sütteki yağ oranları arasında gözlenen farkın istatistik olarak önemli olup olmadığını kontrol etmek için 8 ineğin yemleme öncesi ve sonrasında sütlerindeki (%) yağ miktarı aşağıdaki gibi tespit edilmiştir.

Yemleme öncesi Yağ miktarı (%)	3.35	3.32	3.45	3.40	3.60	3.41	3.70	3.52
Yemleme sonrası Yağ miktarı (%)	3.12	3.20	3.40	3.42	3.50	3.45	3.40	3.48

Yemleme öncesi ve yemleme sonrası sütteki yağ miktarı tespit edilen inekler aynı inekler olduğu için iki grup birbirine bağımlıdır. Yemlemenin sütteki yağ miktarını etkileyip etkilemediğini kontrol için çift taraflı eş-yapma t-testinin uygulanması gerekir.

Yemlemenin sütteki yağ miktarını etkileyip etkilemediğini kontrol için eş-yapma t-testi Tablo 8.8'de uygulanmıştır.

Tablo 8.8. Yemlemenin sütteki yağ miktarını etkileyip etkilemediğini kontrol için uygulanan eş-yapma t-testi

H_0: Yemleme öncesi ve sonrası sütteki yağ miktarları arasında gözlenen farklar tesadüften ileri gelmiştir. İstatistik olarak önemli değildir ve sıfır kabul edilebilir. Yemleme sütteki yağ miktarını değiştirmemiştir. Kısaca $\mu_{\bar{D}} = 0$'dır.

H_1: Yemleme öncesi ve sonrası sütteki yağ miktarları arasında gözlenen farklar tesadüften ileri gelmemiştir. İstatistik olarak önemlidir ve sıfır kabul edilemez. Yemleme sütteki yağ miktarını değiştirmiştir. Kısaca $\mu_{\bar{D}} \neq 0$'dır.

Uygulanacak hipotez kontrolü çift taraflı hipotez kontrolü olduğu için karşıt hipotez $\mu_{\bar{D}} \neq 0$ şeklinde kurulmuştur.

İnekler	Yemlemeden önce(X_{1i})	Yemlemeden sonra (X_{2i})	D_i=(X_{1i}-(X_{2i})
1	3.35	3.12	0.23
2	3.32	3.20	0.12
3	3.45	3.40	0.05
4	3.40	3.42	-0.02
5	3.60	3.50	0.10
6	3.41	3.45	-0.04
7	3.70	3.40	0.30
8	3.52	3.48	0.04

$$\sum D_i = 0.78 \qquad \overline{D} = \frac{0.78}{8} \cong 0.0975 \qquad \sum d_D^2 = 0.0974$$

Yemlemenin sütteki yağ miktarını değiştirip değiştirmediğine karar vermek için test istatistiği (8.5) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

(8.5) numaralı eşitlik kullanılarak test istatistiğinin hesaplanabilmesi için eşler arası farkların ortalamasına ait standart hata (5.2) numaralı eşitlikten;

Tablo 8.8 devam

$$S_{\overline{D}} = \frac{\sqrt{\dfrac{0.0974}{(8-1)}}}{\sqrt{8}} = 0.0417 \ ,$$

ve (8.5) numaralı eşitlikten test istatistiği de;

$$t = \frac{0.0975}{0.0417} \cong 2.338 \text{ olarak bulunur.}$$

Hesaplanan test istatistiği (8-1) =7 serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir. Araştırıcı I. tip hata olasılığını α=0.05 olarak belirlemiş ise çift taraflı hipotez kontrolü yapıldığı için Tablo C'den, 7 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'luk alanının, yani kontrol hipotezinin ret bölgesinin 2.365 değerinden başladığı görülür. Hesaplanan test istatistiğinin değeri 2.338 olup kritik bölgenin başladığı t-değerinden küçüktür ve H_0 hipotezinin kabul bölgesine düşmektedir. Bu sebeple de kontrol hipotezi kabul edilir ve yemlemenin sütteki yağ miktarını etkilemediği kararına varılır.

8.6. Ortalamalar Arası Farka ait Hipotez Kontrolünde Örnek Genişliği

Araştırıcı, iki grup ortalaması arasındaki farkın tesadüften ileri gelip gelmediğine dair hipotez kontrolünden önce, hangi büyüklükteki farkların önemli olabilmesi için grupların örnek genişliklerinin en az kaç olması gerektiğini hesaplamak isteyebilir. Ortalamaları karşılaştırılacak grupların normal dağılım gösteren bir populasyondan alındığı varsayılarak örnek genişliği (8.6) numaralı eşitlik ile tahmin edilebilir.

$$n \geq \frac{2S_x^2}{\delta^2}(t_{(\alpha,sd)} + t_{(\beta,sd)})^2 \qquad \ldots(8.6)$$

Eşitlikte, δ, iki grubun temsil ettiği populasyon ortalamaları arasındaki farktır, I. tip hata olasılığı (α) testin tek taraflı mı yoksa çift taraflı mı yapılacağına bağlı olarak tek veya çift taraflı t-değeridir. β, II. tip hata olasılığıdır. S_x^2, populasyon varyansının en iyi tahmini, yani toplanmış varyanstır.

Ortalamalar arası farka ait hipotez kontrolü için gerekli olan en az örnek genişliği, populasyon ortalamaları arasında gözlenebilir en küçük farktan etkilenir. Çok küçük farklılıkların gözlenmesi durumunda kontrol hipotezinin ret edilmesi istenirse örnek genişliği büyür. Örnek içinde bireyler arasındaki değişimin büyük olması da örnek genişliğinin artmasına sebep olur. Grup ortalamaları arasındaki farkın önemli olup olmadığını kontrol etmek için uygulanacak hipotez kontrolündeki I. tip hata olasılığı küçüldükçe, iki grubun temsil ettiği populasyon ortalamaları arasındaki en küçük farkı saptamak için gerekli örnek genişliği artar. Ayrıca, testin gücünün artması da örnek genişliğinin artmasını, yani büyük örnekler ile çalışılmasını gerektirir.

İki grup ortalaması arasındaki fark karşılaştırılırken eğer n_1=n_2 ise testin gücü maksimumdur. Fakat iki gruptaki gözlem sayısının eşit olmaması sık rastlanan bir durumdur. Birinci grubun gözlem sayısının ne olacağı belirlendikten sonra örnek genişliği (8.6) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır. Örnek genişliği (8.6) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplandıktan sonra da ikinci grubun örnek genişliği (8.7) numaralı eşitlik kullanılarak tahmin edilir.

$$n_2 = \frac{n(n_1)}{2n_1 - n} \qquad \ldots(8.7)$$

Ortalamalar arası farka ait hipotez kontrolünde güvenilir sonuçlara ulaşılması için grupların örnek genişliklerinin tahmini Bölüm 8.5.1'de ÖRNEK 1 için Tablo 8.9'da verilmiştir.

Tablo 8.9. Bölüm 8.5.1'de ÖRNEK 1 için örnek genişliklerinin tahmini

Uykusuzluk şikayeti için kullanılan A ve B ilaçlarının uyku süreleri arasındaki farkın en fazla 2 saat duyarlılık ile %5 seviyesinde %90 güç ile saptanabilmesi için A ve B ilaçları ile kaçar hastanın tedavi edilmesi gerektiğinin tahmin edilmesi istenmektedir.

Bu amaçla yapılan bir çalışmada uykusuzluktan şikâyetçi 25 hastadan tesadüfen seçilen 10 tanesine A uyku ilacı, diğer 15 tanesine ise B uyku ilacı verilmiştir. Bu uygulamadan sonra söz konusu hasta gruplarının uyku süresi (saat) ortalamaları ve standart hataları sırası ile $\overline{A} \pm S_{\overline{A}}$ = 3.5 ± 0.70 ve $\overline{B} \pm S_{\overline{B}}$ = 4.5± 0.90 olarak bulunmuştur.

Tablo 8.9 devam

Bölüm 8.5.1 ÖRNEK 1'de açıklandığı gibi (5.2) numaralı eşitlikten A ve B gruplarının varyansları $S_A^2 = S_{\overline{A}}^2.n$ ve $S_B^2 = S_{\overline{B}}^2.n$ şeklinde yazılabilir. Buradan grupların varyansları $S_A^2 = (0.7)^2(10) = 4.9$ ve $S_B^2 = (0.9)^2(15) = 12.15$ olarak bulunur.

(8.6) numaralı eşitlikte S_x^2, populasyon varyansının en iyi tahmini, yani toplanmış varyanstır ve:

$$S_x^2 = \frac{(10-1)4.9+(15-1)2.15}{(10-1)+(15-1)} \cong 9.313 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Yapılan araştırmada uyku süresi bakımından B ilacının daha iyi olup olmadığı araştırıldığı için hipotez kontrolü tek taraflı hipotez kontrolüdür. Hipotez kontrolünde, α=%5 seviyesinde tek taraflı olarak, B ilacının 2 saat kadar küçük farkla daha iyi olduğuna %90 olasılık (1-β=0.90) ile karar verilmesi isteniyorsa örnek genişliği (8.6) numaralı eşitlik kullanılarak aşağıdaki şekilde tahmin edilir:

$$n \geq \frac{2S_x^2}{\delta^2}(t_{(\alpha,sd)} + t_{(\beta,sd)})^2$$

Yapılan hipotez kontrolünde sd=(10-1)+(15-1)=23, $t_{(0.05,\ 23)}$=1.714 ve $t_{(0.10,\ 23)}$=1.319'dur. Bu durumda örnek genişliği;

$$n \geq \frac{2(9.313)}{(2)^2}(1.714+1.319)^2 \cong 42.84$$

yani yaklaşık 43 olarak hesaplanır.

Tahmin edilen örnek genişliği kullanılarak örnek genişliği yine tahmin edilirse sd=43-2=41 için Tablo C'de 41 serbestlik dereceli t-dağılımına ait değerler olmadığından bu serbestlik derecesine en yakın 50 serbestlik dereceli t-dağılımı değerleri kullanılmış ve $t_{(0.05,\ 41\cong 50)}$=1.676, $t_{(0.10,\ 41\cong 50)}$=1.299 için ,

$$n \geq \frac{2(9.313)}{(1.5)^2}(1.676+1.299)^2 \cong 41.21$$

yani yaklaşık 42 olarak hesaplanmıştır.

Yapılan araştırmada A ilacı verilen birinci gruptaki hasta sayısı 35 olarak belirlenmiş ise ikinci grupta olması gereken hasta sayısı (8.7) numaralı eşitlikten; $n_2 = \frac{n(n_1)}{2n_1 - n} = \frac{(42)(35)}{2(35)-42} = 52.5$ yani yaklaşık 53 olarak tahmin edilir. Bu durumda yapılan araştırma için 35 A ilacı ve 53 B ilacı uygulanacak toplam 88 hastaya ihtiyaç vardır.

8.7. Korelasyon Katsayısına ait Hipotez Kontrolü

Bir örnekte üzerinde çalışılan iki özellik arasındaki korelasyon katsayısı r olarak hesaplandığı zaman, gerçekten iki özellik arasında doğrusal bir ilişkinin olup olmadığı araştırılmak istenebilir. Örnekten hesaplanan korelasyon katsayısı populasyona ait korelasyon katsayısının (ρ) yani parametrenin bir tahminidir ve çoğu zaman populasyona ait korelasyon katsayısı bilinmez.

Populasyona ait korelasyon katsayısının bilinmemesi durumunda örneğin temsil ettiği populasyona ait korelasyon katsayısının sıfır olduğu kabul edilerek örnekten hesaplanan korelasyon katsayısının sıfırdan farklı olup olmadığına ilişkin hipotez kontrolü, t dağılımından yararlanılarak yapılır.

Populasyona ait korelasyon katsayısının sıfır olduğu kabul edilerek korelasyon katsayısına ait hipotez kontrolü uygulanırken kontrol ve karşıt hipotezler aşağıdaki şekilde kurulmalıdır.

H_0: Çalışılan iki özellik arasındaki korelasyon katsayısı tesadüften ileri gelmiştir. Sıfır kabul edilebilir ve istatistik olarak önemli değildir. Örnek, iki özellik arasındaki korelasyon katsayısı sıfır olan bir populasyonu temsil etmektedir, yani söz konusu iki özellik arasında doğrusal bir ilişki olduğu söylenemez. Kısaca $\rho_{xy}=0$ veya $\mu_r=0$'dır.

H_1: Çalışılan iki özellik arasındaki korelasyon katsayısı tesadüften ileri gelmemiştir. Sıfır kabul edilemez ve istatistik olarak önemlidir. Örnek, iki özellik arasındaki korelasyon katsayısı sıfır olan bir populasyonu temsil etmemektedir, yani söz konusu iki özellik arasında doğrusal bir ilişki olduğu söylenebilir. Kısaca $\rho_{xy}\neq 0$ veya $\mu_r\neq 0$'dır.

Kurulan kontrol hipotezi doğru olduğu zaman örneğin alındığı populasyonda söz konusu özellikler arasındaki korelasyon katsayısı, $\rho=0$ olacak ve bu populasyondan alınan örneklerden hesaplanacak korelasyon katsayılarının dağılımı normal dağılıma yaklaşacaktır. Üzerinde çalışılan örnekte X ve Y özellikleri arasındaki korelasyon katsayısının sıfır olup olmadığını kontrol etmek için t dağılımından yararlanılarak (8.8) numaralı eşitlik kullanılarak t-değeri hesaplanır.

$$t = \frac{r-\rho}{S_r} \qquad \ldots(8.8)$$

(8.8) numaralı eşitlikte S_r, korelasyon katsayısına ait örnekleme dağılımının örnekten tahmin edilen standart sapması, yani korelasyon katsayısının standart hatasıdır ve (5.16) numaralı eşitlik kullanılarak $S_r = \sqrt{\frac{(1-r^2)}{(n-2)}}$ şeklinde hesaplanır.

Örnekten hesaplanan korelasyon katsayısının istatistik olarak önemli olup olmadığını kontrol etmek için (8.8) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanan t-değeri (n-2) serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir.

ÖRNEK 1:

32 adet tavuk yumurtasında yumurta çevresi ile yumurta sarısı ağırlığı arasındaki korelasyon katsayısı r=0.38 olarak bulunmuştur. Adı geçen özellikler arasında doğrusal bir ilişkinin olduğu söylenebilir mi?

Yumurta çevresi ve yumurta sarısı ağırlığı arasındaki korelasyon katsayısının tesadüfi olup olmadığı, yani söz konusu iki özellik arasında doğrusal bir ilişki olup olmadığı araştırılmak istenmektedir. Bu amaçla uygulanacak hipotez kontrolü, aşağıdaki şekilde hipotezlerin kurulması ile başlar.

H_0: Yumurta çevresi ve yumurta sarısı ağırlığı arasındaki korelasyon katsayısı sıfır kabul edilebilir, istatistik olarak önemli değildir. Söz konusu iki özellik arasında doğrusal bir ilişki olduğu söylenemez. Kısaca ρ_{xy}=0 veya μ_r=0'dır.

H_1: Yumurta çevresi ve yumurta sarısı ağırlığı arasındaki korelasyon katsayısı sıfır kabul edilemez, istatistik olarak önemlidir. Söz konusu iki özellik arasında doğrusal bir ilişki olduğu söylenebilir. Kısaca ρ_{xy}=0 veya μ_r=0'dır.

X ve Y özellikleri arasında hesaplanan korelasyon katsayısının sıfır olup olmadığını kontrol etmek için t-değeri olarak (8.8) numaralı eşitlik kullanılır. (8.8) numaralı eşitlik kullanılarak t-değerinin hesaplanabilmesi için ilk olarak (5.16) numaralı eşitlikten korelasyon katsayısının standart hatası;

$$S_r = \sqrt{\frac{(1-0.38^2)}{(32-2)}} \cong 0.169 \text{ bulunur.}$$

(8.8) numaralı eşitlikten ise test istatistiği;

$$t = \frac{r-\rho}{S_r} = \frac{0.38}{0.169} \cong 2.249 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Hesaplanan test istatistiği (n-2) = (32-2) =30 serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir. Araştırıcı I. tip hata olasılığını α=0.05 olarak belirlemiş ise çift taraflı hipotez kontrolü yapıldığı için Tablo C'den, 30 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'luk alanının, yani kontrol hipotezinin ret bölgesinin 2.042 değerinden başladığı görülür. Hesaplanan test istatistiğinin değeri 2.249 olup kritik bölgenin başladığı t-değerinden büyüktür ve H_0 hipotezinin ret bölgesine düşer. Bu sebeple de kontrol hipotezi ret edilerek yumurta çevresi ve yumurta sarısı ağırlığı arasında istatistik olarak önemli bir doğrusal ilişki olduğu kararına varılır.

ÖRNEK 2:

Öğrencilerin ara sınavından almış oldukları notlar ile yarı yıl sonu sınavından almış oldukları notlar arasında doğrusal bir ilişkinin var olduğunu söyleyebilmek için, tesadüfen alınan 20 öğrenciden hesaplanan korelasyon katsayısının en az kaç olması gerektiği araştırılmaktadır.

Öğrencilerin ara sınav notları ile yarıyıl sonu sınav notları arasında doğrusal bir ilişkinin olduğunu söyleyebilmek için H_0: ρ_{xy}=0 kontrol hipotezinin reddedilmesi gerekir. Kontrol hipotezinin reddedilebilmesi için de (8.8) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanacak test istatistiğinin α seviyesinde (n-2) serbestlik dereceli t-dağılımı değerine eşit veya büyük olması gerekir. Bu örnekte korelasyon katsayısı için hesaplanacak test istatistiği (20-2)=18 serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir. Araştırıcı I. tip hata olasılığını α=0.05 olarak belirlemiş ise Tablo C'den, 18 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'luk alanın başladığı t-değeri 2.101 olarak bulunur. Bu durumda (8.8) numaralı eşitlik 2.101 değerine eşitlenerek "r" çözülür.

$$2.101 = \frac{r}{\sqrt{\frac{(1-r^2)}{(20-2)}}} \rightarrow (2.101)^2 = \frac{r^2}{\frac{(1-r^2)}{18}} \rightarrow (2.101)^2 = \frac{18r^2}{(1-r^2)} \rightarrow (2.101)^2(1-r^2) = 18r^2$$

Yukarıdaki eşitlikten r çözüldüğünde, ara sınav notları ile yarıyıl sonu sınav notları arasında istatistik olarak önemli bir doğrusal bir ilişkinin olduğunu söyleyebilmek için 20 öğrenciden hesaplanan korelasyon katsayısının en küçük değerinin r=0.4438 olması gerektiği bulunur.

ÖRNEK 3:

X ve Y özelliklerinin 30 bireylik bir örnekten elde edilen verileri kullanılarak b_{yx} = -0.9, b_{xy} = -0.4 olarak hesaplanmıştır. Araştırıcı, regresyon katsayılarını hesapladıktan sonra X ve Y özellikleri arasında istatistik olarak önemli bir doğrusal bir ilişkinin olup olmadığını araştırmaya karar vermiştir.

Korelasyon ve regresyon katsayıları arasındaki ilişkiden yararlanılarak, (3.3) numaralı eşitlikte verilen korelasyon katsayısı, regresyon katsayıları cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$r = \frac{\sum d_x d_y}{\sqrt{\sum d_x^2 \sum d_y^2}}$$

$$r^2 = \frac{(\sum d_x d_y)^2}{\sum d_x^2 \sum d_y^2}$$

Bu eşitlik; $r^2 = \dfrac{\sum d_x d_y}{\sum d_x^2} \dfrac{\sum d_x d_y}{\sum d_y^2}$ şeklinde düzenlenebilir.

Yeni düzenlenen eşitlikte birinci terim b_{yx} ve ikinci terim b_{xy}'dir. Bu eşitliğin karekökü alınarak, korelasyon katsayısı $r = \sqrt{(b_{yx})(b_{xy})}$ şeklinde elde edilir.

X ve Y özelliklerinin 30 bireylik bir örnekten elde edilen verileri kullanılarak b_{yx} = -0.9, b_{xy} = -0.4 olarak hesaplanmış ise korelasyon katsayısı $r = \sqrt{(-0.9)(-0.4)} = -0.6$ olarak bulunur. (-0.9) ve (-0.4) çarpımlarının karekökü (0.6) olmasına karşın korelasyon katsayının işareti negatiftir. Çünkü hesaplanan regresyon katsayıları iki özellik arasında, bir özelliğin artarken diğer özelliğin azaldığı şeklinde ters bir ilişki olduğunu göstermekte dir. Bunun korelasyon katsayısındaki karşılığı da korelasyon katsayısının işaretinin negatif olmasıdır. Dolayısıyla, regresyon ve korelasyon katsayılarının işaretlerinin birbirinden farklı olması mümkün değildir.

X ve Y özellikleri arasında istatistik olarak önemli doğrusal bir ilişkinin olup olmadığını araştırmak üzere yapılan hipotez kontrolü Tablo 8.10'da uygulanmıştır.

Tablo 8.10. X ve Y özellikleri arasında istatistik olarak önemli doğrusal bir ilişkinin olup olmadığını araştırmak üzere uygulanan hipotez kontrolü

H_0: Örnek, iki özellik arasındaki korelasyon katsayısı sıfır olan bir populasyonu temsil etmektedir. Yani söz konusu iki özellik arasında doğrusal bir ilişki olduğu söylenemez. Kısaca ρ_{xy}=0 veya μ_r=0'dır.
H_1: Örnek, iki özellik arasındaki korelasyon katsayısı sıfır olan bir populasyonu temsil etmemektedir. Yani söz konusu iki özellik arasında doğrusal bir ilişki olduğu söylenebilir. Kısaca ρ_{xy}≠0 veya μ_r≠0'dır.

Korelasyon katsayısının standart hatası (5.16) numaralı eşitlikten;

$$S_r = \sqrt{\frac{(1-(-0.6)^2)}{(30-2)}} \cong 0.151,$$

X ve Y arasındaki korelasyon katsayısının sıfır olup olmadığını kontrol etmek için t-değeri de (8.8) numaralı eşitlikten;

Tablo 8.10 devam

$$t = \frac{-0.6}{0.151} \cong -3.974 \text{ olarak bulunur.}$$

Hesaplanan test istatistiği (30-2) =28 serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir. Araştırıcı I. tip hata olasılığını α=0.01 olarak belirlemiş ise çift taraflı hipotez kontrolü yapıldığı için Tablo C'den, 28 serbestlik dereceli t-dağılımında %0.5'lik alanın, yani kontrol hipotezinin ret bölgesinin -2.763 değerinden başladığı görülür. Hesaplanan test istatistiğinin değeri -3.974, kritik bölgenin başladığı t-değerinden küçük olup H_0 hipotezinin ret bölgesine düşmektedir. Bu sebeple kontrol hipotezi ret edilerek X ve Y özellikleri arasında önemli bir doğrusal ilişki olduğu kararına varılır.

8.8. Regresyon Katsayısına Ait Hipotez Kontrolü

Yapılan bir çalışmada iki özellik üzerinde çalışılıyorsa, özelliklerden (değişkenlerden) biri diğerine bağlı olarak değişebilir dolayısıyla özelliklerden biri diğerinin fonksiyonu olarak dikkate alınabilir. Bu durumda araştırıcının bağımsız değişkenin bir birim artmasına karşılık bağımlı değişkende meydana gelen ortalama değişme miktarını bulabilmek için regresyon katsayısını hesaplaması gerekir. Regresyon katsayısı hesaplandığı zaman, bağımlı değişkende meydana gelen değişme miktarının istatistik olarak önemli olup olmadığı kontrol edilmek istendiğinde regresyon katsayısına ait hipotez kontrolünün yapılması gerekir.

Regresyon katsayısına ait hipotez kontrolü uygulanırken kontrol ve karşıt hipotezler aşağıdaki şekilde kurulmalıdır.

H_0: Üzerinde çalışılan iki özellik için hesaplanan regresyon katsayısı sıfır kabul edilebilir. Bağımsız değişkeninin bir birim artmasına karşılık bağımlı değişkende ortalama olarak meydana gelen değişme miktarı istatistik olarak önemli değildir. Kısaca, β_{yx}=0'dır.

H_1: Üzerinde çalışılan iki özellik için hesaplanan regresyon katsayısı sıfır kabul edilemez. Bağımsız değişkeninin bir birim artmasına karşılık bağımlı değişkende ortalama olarak meydana gelen değişme miktarı istatistik olarak önemlidir. Kısaca $\beta_{yx}\neq$0'dır.

Test istatistiğinin hesaplanması için ilgilenilen örnekleme dağılımı regresyon katsayısına ait örnekleme dağılımıdır. Üzerinde çalışılan örneğin, β_{yx}=0 olan bir populasyondan tesadüfen alınmış bir örnek olup olmadığına karar vermek için populasyona ait β_{yx} bilinmediğinden kullanılması gereken t-değeri (8.9) numaralı eşitlikte verilmiştir.

$$t = \frac{b_{yx} - \beta_{yx}}{S_b} \qquad \ldots(8.9)$$

(8.9) numaralı eşitlikte, S_b, regresyon katsayısına ait standart hata olup (5.29) numaralı eşitlik kullanılarak $S_b = \sqrt{\frac{S_e^2}{\sum d_x^2}}$ şeklinde hesaplanır. (5.29) numaralı eşitlikte ise S_e^2, regresyondan sapma kareler ortalaması (regresyon varyansı) olup, (5.28) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

Örnekten hesaplanan regresyon katsayısının istatistik olarak önemli olup olmadığını kontrol etmek için (8.9) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanan t-değeri (n-2) serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir.

ÖRNEK 1:

10 bireylik bir örnekte X ve Y gibi iki özelliğe ilişkin varyanslar $S_X^2 = S_Y^2 = 1.44$ ve bu iki özellik arasındaki korelasyon katsayısı da r = -0.5 olarak bulunduğuna göre Y'nin X'e göre regresyon katsayısının istatistik olarak önemli olduğu söylenebilir mi?

Yapılan çalışmada X ve Y özelliklerine ait standart sapmalar $\sqrt{S_X} = \sqrt{S_Y} = \sqrt{1.44} = 1.2$ olarak bulunduktan sonra (8.10) numaralı eşitlik;

$r = b_{yx}\frac{S_x}{S_y} \Rightarrow \; b_{yx} = \frac{(r)S_y}{S_x}$ şeklinde düzenlenerek regresyon katsayısı;

$b_{yx} = \frac{(-0.5)\,(1.2)}{(1.2)} = -0.5$ olarak bulunur.

Korelasyon ve regresyon katsayısı arasında (8.10) ve (8.11) numaralı eşitliklerde verilen ilişkiler bilinmiyor ise regresyon katsayısı aşağıdaki şekilde de hesaplanabilir:

10 bireyden $S_X^2 = S_Y^2 = 1.44$ olarak hesaplanmış ise özellikler ait kareler toplamları $\sum d_x^2 = \sum d_y^2 = 12.96$ olarak hesaplanır. (3.3) numaralı eşitlikte verilen korelasyon katsayısı formülünden ise çarpımlar toplamı $\sum d_x d_y = -6.48$ olarak bulunur. (3.5) numaralı eşitlik kullanılarak regresyon katsayısı $b_{yx} = \frac{-6.48}{12.96} = -0.5$ olarak hesaplanır.

Regresyon katsayısı hesaplandıktan sonra X bağımsız değişkeninin bir birim artmasına karşılık Y bağımlı değişkeninde ortalama olarak gözlenecek değişimin tesadüfi olup olmadığını, yani Y'nin X'e olan regresyon katsayısının sıfırdan farklı olup olmadığını kontrol etmek için yapılan regresyon katsayına ait hipotez kontrolü Tablo 8.11'de uygulanmıştır.

Tablo 8.11. Y'nin X'e olan regresyon katsayısının sıfırdan farklı olup olmadığını kontrol etmek için yapılan regresyon katsayına ait hipotez kontrolü

H_0: Üzerinde çalışılan iki özellik için hesaplanan regresyon katsayısı sıfır kabul edilebilir. Bağımsız değişkenin bir birim artmasına karşılık bağımlı değişkende ortalama olarak meydana gelen değişme miktarı istatistik olarak önemli değildir. Kısaca, $\beta_{yx}=0$'dır.

H_1: Üzerinde çalışılan iki özellik için hesaplanan regresyon katsayısı sıfır kabul edilemez. Bağımsız değişkenin bir birim artmasına karşılık bağımlı değişkende ortalama olarak meydana gelen değişme miktarı istatistik olarak önemlidir. Kısaca $\beta_{yx}\neq 0$'dır.

(8.9) numaralı eşitlik kullanılarak t-değerinin hesaplanabilmesi için ilk olarak (5.28) numaralı eşitlikten regresyondan sapma kareler ortalamasının hesaplanması gerekir.

$$S_e^2=\frac{\sum d_y^2-b_{yx}\sum d_x d_y}{n-2}=\frac{12.96-(-0.5)(-6.48)}{10-2}=1.215 \text{olarak}$$

hesaplandıktan sonra regresyon katsayısının standart hatası (5.29) numaralı eşitlikten;

Tablo 8.11 devam

$$S_b=\sqrt{\frac{S_e^2}{\sum d_x^2}}=\sqrt{\frac{1.215}{12.96}}\cong 0.306 \quad \text{ve (8.9) numaralı eşitlikten t-değeri de;}$$

$$t=\frac{-0.5}{0.306}\cong -1.634 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Hesaplanan test istatistiği (10-2) =8 serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir. Araştırıcı I. tip hata olasılığını α=0.05 olarak belirlemiş ise çift taraflı hipotez kontrolü yapıldığı için Tablo C'den, 8 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'luk alanın, yani kontrol hipotezinin ret bölgesinin -2.306 değerinden başladığı görülür. Hesaplanan test istatistiğinin değeri -1.634 olup kritik bölgenin başladığı t-değerinden büyüktür ve H_0 hipotezinin kabul bölgesine düşmektedir. Bu sebeple kontrol hipotezi kabul edilir. X bağımsız değişkeninin bir birim artmasına karşılık Y bağımlı değişkeninde ortalama olarak gözlenecek değişimin tesadüfî olduğu, yani Y'nin X'e olan regresyon katsayısının sıfırdan farklı olmadığı kararına varılır.

ÖRNEK 2:

Belirli bir yörede yetişen Titrek kavaklardan tesadüfen seçilen 8 tanesinin yaş ve boylarına ilişkin Tablo 8.12'deki ölçümler yapılmıştır. Bu çalışmada yaşın bir yıl artmasına karşılık titrek kavakların boylarında ortalama olarak gözlenen değişimin istatistik olarak önemli olup olmadığının araştırılması amaçlanmıştır.

Yaşın bir yıl artmasına karşılık titrek kavakların boylarında ortalama olarak gözlenen değişimin istatistik olarak önemli olup olmadığının araştırılabilmesi için Tablo 8.12'de verildiği gibi regresyon katsayısının hesaplanması gerekir.

Regresyon katsayısı hesaplandıktan sonra titrek kavaklarda yaşın bir yıl artmasına karşılık boylarında ortalama olarak gözlenen 0.3832 m'lik artışın istatistik olarak önemli olup olmadığının araştırılması için yapılan regresyon katsayına ait hipotez kontrolü Tablo 8.13'de uygulanmıştır.

Tablo 8.12. Titrek kavaklardan tesadüfen seçilen 8 tanesinin yaş ve boylarına ilişkin ölçümler ve boyun yaşa göre regresyon katsayısı

Yaş (yıl) (X)	Boy (m) (Y)
23	19.5
20	18.0
19	17.8
23	19.0
18	17.5
16	16.0
19	17.0
21	16.5

$$\sum d_x^2 = 40.875$$
$$\sum d_y^2 \cong 9.879$$
$$\sum d_x d_y \cong 15.663$$
$$b_{yx} = \frac{15.663}{40.875} \cong 0.3832$$

Hesaplanan regresyon katsayısı titrek kavakların bir yıl yaşlanmasına karşılık boylarının ortalama olarak 0.3832 m arttığını göstermiştir.

Tablo 8.13. Titrek kavaklarda yaşın bir yıl artmasına karşılık boylarında ortalama olarak gözlenen artışın tesadüfi olup olmadığının araştırılması için yapılan hipotez kontrolü

H_0: Titrek kavaklarda yaşın bir yıl artmasına karşılık boylarında ortalama olarak gözlenen 0.3832 m'lik artış tesadüften ileri gelmiştir ve istatistik olarak önemli değildir. Kısaca, $\beta_{yx}=0$'dır.

H_1: Titrek kavaklarda yaşın bir yıl artmasına karşılık boylarında ortalama olarak gözlenen 0.3832 m'lik artış tesadüften ileri gelmemiştir ve istatistik olarak önemlidir. Kısaca $\beta_{yx}\neq 0$'dır.

(8.9) numaralı eşitlik kullanılarak t-değerinin hesaplanabilmesi için önce (5.28) numaralı eşitlikten regresyondan sapma kareler ortalamasının hesaplanması gerekir.

$$S_e^2 = \frac{\sum d_y^2 - b_{yx}\sum d_x d_y}{n-2} = \frac{9.879-(0.3832)(15.663)}{8-2} = 0.646 \text{ olarak}$$

hesaplandıktan sonra regresyon katsayısının standart hatası (5.29) numaralı eşitlikten;

Tablo 8.13. devam

$$S_b = \sqrt{\frac{S_e^2}{\sum d_x^2}} = \sqrt{\frac{0.646}{40.875}} \cong 0.126$$ ve (8.9) numaralı eşitlikten t-değeri de;

$$t = \frac{0.3832}{0.126} \cong 3.041$$ olarak hesaplanır.

Hesaplanan test istatistiği (8-2) =6 serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir. Araştırıcı I. tip hata olasılığını α=0.05 olarak belirlemiş ise çift taraflı hipotez kontrolü yapıldığı için Tablo C'den, 6 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'luk alanın, yani kontrol hipotezinin ret bölgesinin 2.447 değerinden başladığı görülür. Hesaplanan test istatistiğinin değeri 3.041 olup kritik bölgenin başladığı t-değerinden büyüktür ve H_0 hipotezinin ret bölgesine düşmektedir. Bu sebeple kontrol hipotezi ret edilir.

Tablo 8.13'de uygulanan hipotez kontrolü sonunda hesaplanan boyun yaşa göre regresyon katsayısının tesadüfi olmadığına, bir başka deyişle, titrek kavakların bir yıl yaşlanmasına karşılık ortalama olarak boylarında gözlenen 0.3832 m'lik artışın istatistik olarak önemli olduğu kararına varılmıştır.

8.9. Regresyon Katsayıları Arasındaki Farka ait Hipotez Kontrolü

Üzerinde çalışılan iki özellik arasındaki regresyon katsayısı iki ayrı bölgede, çeşitte veya iki farklı muamele uygulanmış gruplarda hesaplanabilir. Bu durumda iki örnekten hesaplanan regresyon katsayıları arasındaki farklın, yani bağımsız değişkeninin bir birim artmasına karşılık bağımlı değişkende meydana gelen ortalama değişmeler arasındaki farklın tesadüfi olup olmadığının araştırılması gerekir. Bu kontrol regresyon katsayıları arasındaki farka ait hipotez kontrolü uygulanarak test edilebilir.

Regresyon katsayıları arasındaki farka ait hipotez kontrolü uygulanırken kontrol ve karşıt hipotezler aşağıdaki şekilde kurulmalıdır.

H_0: İki grup arasında, bağımsız değişkenin bir birim artmasına karşılık bağımlı değişkende meydana gelen değişme bakımından gözlenen fark sıfır kabul edilebilir. Bağımsız değişkenin bir birim artmasına karşılık bağımlı değişkende meydana gelen değişme bakımından örnekler aynı populasyonu temsil etmektedir. Kısaca, $\beta_{yxA} - \beta_{yxB} = 0$'dır.

H_1: İki grup arasında bağımsız değişkenin bir birim artmasına karşılık bağımlı değişkende meydana gelen değişme bakımından gözlenen fark sıfır kabul edilemez. Bağımsız değişkenin bir birim artmasına karşılık bağımlı değişkende meydana gelen değişme bakımından örnekler aynı populasyonu temsil etmemektedir. Kısaca, $\beta_{yxA} - \beta_{yxB} \neq 0$'dır.

Regresyon katsayıları arasındaki farka ait hipotez kontrolü, araştırmanın amacı doğrultusunda yukarıda ifade edildiği gibi çift taraflı veya tek taraflı uygulanabilir. Bu durumda hipotezler;

H_0: $\beta_{yxA} - \beta_{yxB} = 0$ veya **H_0:** $\beta_{yxA} - \beta_{yxB} = 0$
H_1: $\beta_{yxA} < \beta_{yxB}$ **H_1:** $\beta_{yxA} > \beta_{yxB}$

şeklinde kurulur.

Burada araştırıcının ilgilendiği regresyon katsayıları arasındaki farka ait örnekleme dağılımıdır. İki regresyon katsayısı arasındaki farkın istatistik olarak önemli olup olmadığını, yani üzerinde çalışılan grupların regresyon katsayısı bakımından aynı populasyondan tesadüfen alınmış örnekler olup olmadıklarını kontrol için t-değeri (8.10) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

$$t = \frac{b_{yx_A} - b_{yx_B}}{S_{(b_A - b_B)}} \qquad \ldots(8.10)$$

(8.10) numaralı eşitlikte $S_{(b_A - b_B)}$, regresyon katsayıları arasındaki farkın standart hatası olup (5.34) eşitlik kullanılarak;

$$S_{(b_A - b_B)} = \sqrt{S_e^2\left(\frac{1}{\sum d_{x_A}^2} + \frac{1}{\sum d_{x_B}^2}\right)}$$ şeklinde hesaplanır.

(5.34) numaralı eşitlikte S_e^2, n_A ve n_B örnek genişliğindeki örneklerden (5.28) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanan regresyondan sapma kareler ortalamalarının serbestlik dereceleri ile tartılı ortalamasıdır ve (5.35) numaralı eşitlik kullanılarak;

$$S_e^2 = \frac{(n_A - 2)S_{e_A}^2 + (n_B - 2)S_{e_B}^2}{(n_A - 2) + (n_B - 2)}$$

şeklinde hesaplanır.

Hesaplanan regresyon katsayıları arasındaki farkn önemli olup olmadığını kontrol için (8.10) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanan t-değeri [(n_A-2) +(n_B-2)] serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir.

ÖRNEK 1:

İki ayrı ilden tesadüfen seçilen 10'ar bireyde ağırlık (kg) ve boy uzunlukları (cm) Tablo 8.14'de verildiği gibi ölçülmüştür. İki ayrı ilden elde edilen veriler kullanılarak boydaki bir cm artışa karşılık ağırlıkta gözlenen ortalama değişme, yani ağırlığın boya göre regresyon katsayısı ise yine Tablo 8.14'de verildiği gibi hesaplanmıştır.

Tablo 8.14. İki ayrı ilden tesadüfen seçilen 10'ar bireyde ağırlık (kg) ve boy uzunlukları (cm) ölçümleri ve ağırlığın boya göre regresyon katsayıları

İL 1		İL 2		
Ağırlık (Y)	Boy (X)	Ağırlık (Y)	Boy (X)	Birinci ilde:
56	165	57	166	$\sum d_{x1}^2 = 228.00$
75	176	76	178	$\sum d_{y1}^2 \cong 543.60$
70	175	60	169	$\sum d_{x1}d_{y1} \cong 343.00$
61	168	64	169	$b_{yx1} = 343/228 = 1.504$
61	167	63	170	İkinci ilde:
63	172	71	176	$\sum d_{x2}^2 = 214.00$
72	175	78	180	$\sum d_{y2}^2 \cong 492.00$
80	180	62	169	$\sum d_{x2}d_{y2} \cong 320$
76	179	75	177	$b_{yx2} = 1.495$
68	173	71	176	

Tablo 8.14'de hesaplanan regresyon katsayıları 1. ilde bireylerin boyunun 1 cm artmasına karşılık ağırlıklarının 1.504 kg arttığını, 2. ilde ise bireylerin boyunun 1 cm artmasına karşılık ağırlıklarının 1.495 kg arttığını göstermiştir. Araştırmada, boyun 1 cm artmasına karşılık ağırlıkta gözlenen ortalama artışın iki ilde de aynı olup olmadığı, yani ağırlıkta gözlenen artış bakımından iller arasındaki farkın önemli olup olmadığının test edilmesi amaçlanmıştır. Bunun için yapılan regresyon katsayıları arasındaki farka ait hipotez kontrolü Tablo 8.15'de verildiği şekilde uygulanır.

Tablo 8.15. Boyun 1 cm artmasına karşılık ağırlıkta gözlenen ortalama artışın iki ilde de aynı olup olmadığını kontrol için uygulanan hipotez kontrolü

H_0: Boyun 1 cm artmasına karşılık ağırlıkta gözlenen ortalama artış iki ilde de aynıdır, yani ağırlıkta gözlenen artış bakımından iller arasındaki fark tesadüften ileri gelmiştir. İstatistik olarak önemli değildir ve sıfır kabul edilebilir. Kısaca, $\beta_{yx1} - \beta_{yx2} = 0$'dır.

H_1: Boyun 1 cm artmasına karşılık ağırlıkta gözlenen ortalama artış iki ilde de aynı değildir, yani ağırlıkta gözlenen artış bakımından iller arasındaki fark tesadüften ileri gelmemiştir. İstatistik olarak önemlidir ve sıfır kabul edilemez. Kısaca, $\beta_{yx1} \neq \beta_{yx2} = 0$'dır.

(8.10) numaralı eşitlik kullanılarak t-değerinin hesaplanabilmesi için ilk olarak $S_{(b_A - b_B)}$, yani regresyon katsayıları arasındaki farkın standart hatasının hesaplanması gerekir.

Her iki ile ait regresyondan sapma kareler ortalamaları (5.28) numaralı eşitlikten;

$$S_{e_1}^2 = \frac{543.60 - 1.504(343)}{10-2} \cong 3.47$$

$$S^2_{e_2} = \frac{492.00 - 1.495(320)}{10-2} = 1.70 \text{ olarak bulunur.}$$

İller için hesaplanan regresyondan sapma kareler ortalamalarının serbestlik dereceleri ile tartılı ortalaması (5.35) numaralı eşitlik kullanılarak;

$$S^2_e = \frac{(10-2)(3.47) + (10-2)(1.70)}{(10-2) + (10-2)} = 2.585,$$

Regresyon katsayıları arasındaki farkın standart hatası (5.34) numaralı eşitlik kullanılarak;

$$S_{(b1-b2)} = \sqrt{(2.585)(\frac{1}{228.0} + \frac{1}{214.0}} = 0.153 \text{ ve}$$

(8.10) numaralı eşitlikten de t-değeri;

$$t = \frac{1.504 - 1.495}{0.153} \cong 0.059 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Hesaplanan test istatistiği [(10-2) +(10-2)]=16 serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir. Araştırıcı I. tip hata olasılığını α=0.05 olarak belirlemiş ise çift taraflı hipotez kontrolü yapıldığı için Tablo C'den, 16 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'luk alanın, yani kontrol hipotezinin ret bölgesinin 2.120 değerinden başladığı görülür. Hesaplanan test istatistiğinin değeri 0.059 olup kritik bölgenin başladığı t-değerinden çok küçüktür ve H_0 hipotezinin kabul bölgesine düşer. Bu sebeple kontrol hipotezi kabul edilir.

Tablo 8.15'de uygulanan hipotez kontrolü, boyun 1 cm artmasına karşılık ağırlıkta gözlenen ortalama artışın iki ilde de aynı olduğunu göstermiştir. Yapılan araştırmada, verilerin analizi sonucunda, ağırlıkta gözlenen artış bakımından iller arasındaki farkın tesadüften ileri geldiği kararına varılmıştır.

ÖRNEK 2:

2 ve 3 ay süt verilmiş kuzularda doğum ağırlığı (DA) ve 3. aydaki canlı ağırlıklar (CA) Tablo 8.16'da verildiği gibi ölçülmüştür. 2 ve 3 ay süt verilen kuzularda doğum ağırlığının bir kg artmasına karşılık 3. ay canlı ağırlıkta gözlenen ortalama değişme miktarları, yani CA'nın DA'na göre regresyon katsayıları ise Tablo 8.16'daki gibi hesaplanmıştır.

Tablo 8.16. 2 ve 3 ay süt verilen kuzularda doğum ağırlığı (DA) (kg) ve 3. ay canlı ağırlık (kg) ölçümleri ve 3. ay canlı ağırlığının doğum ağırlığına göre regresyon katsayıları

2 ay süt verilen		3 ay süt verilen		
DA (X)	CA (Y)	DA (X)	CA (Y)	2 ay süt verilenlerde:
3.2	16.1	4.2	19.0	$\sum d_{x1}^2 = 3.700$
4.8	19.1	5.1	19.8	$\sum d_{y1}^2 \cong 50.729$
4.9	19.6	4.3	19.6	$\sum d_{x1}d_{y1} \cong 11.320$
5.1	20.0	4.3	17.0	$b_{yx1} = \frac{11.320}{3.700} \cong 3.06$
5.0	18.0	4.6	18.6	3 ay süt verilenlerde:
3.4	11.6	3.8	16.0	$\sum d_{x2}^2 = 1.039$
4.4	16.6	4.7	19.3	$\sum d_{y2}^2 \cong 12.295$
		4.5	18.5	$\sum d_{x2}d_{y2} \cong 2.618$
				$b_{yx2} = \frac{2.618}{1.039} \cong 2.520$

Tablo 8.16'da hesaplanan regresyon katsayıları 2 ay süt verilen kuzularda doğum ağırlığının 1 kg artmasına karşılık 3. aydaki canlı ağırlığın ortalama 3.06 kg arttığını, 3 ay süt verilen kuzularda ise doğum ağırlığındaki 1 kg'lık artışa karşılık 3. aydaki ortalama canlı ağırlık artışının 2.520 kg olduğunu göstermiştir.

Bulunan bu sonuçlar doğrultusunda 2 ay süt verilen kuzularda doğum ağırlığındaki 1 kg'lık artışa karşılık 3. ay canlı ağırlıkta ortalama olarak gözlenen artışın, 3 ay süt verilen kuzulardan daha fazla olmasının istatistik olarak önemli olup olmadığının araştırılması hedeflenmiştir. Bunun için yapılan regresyon katsayıları arasındaki farka ait hipotez kontrolü Tablo 8.16'da verildiği şekilde uygulanır.

Tablo 8.16. 2 ay süt verilen kuzularda doğum ağırlığındaki 1 kg'lık artışa karşılık 3.ay canlı ağırlığında ortalama olarak gözlenen artışın 3 ay süt verilen kuzulara göre daha fazla olup olmadığının araştırılması için uygulanan hipotez kontrolü

H_0: 2 ay süt verilen kuzularda doğum ağırlığındaki 1 kg'lık artışa karşılık 3. ay canlı ağırlıkta ortalama olarak gözlenen artışın 3 ay süt verilen kuzulara göre daha fazla olduğu söylenemez. İki grup arasında 3. ay canlı ağırlığında gözlenen ortalama artış bakımından fark tesadüften ileri gelmiştir ve istatistik olarak önemli değildir. Kısaca, $\beta_{yx1} = \beta_{yx2}$'dir.

H_1: 2 ay süt verilen kuzularda doğum ağırlığındaki 1 kg'lık artışa karşılık 3. ay canlı ağırlıkta ortalama olarak gözlenen artışın 3 ay süt verilen kuzulara göre daha fazla olduğu söylenebilir. İki grup arasında 3. ay canlı ağırlığında gözlenen ortalama artış bakımından fark tesadüften ileri gelmemiştir ve istatistik olarak önemlidir. Kısaca, $\beta_{yx1} > \beta_{yx2}$'dir.

(8.10) numaralı eşitlik kullanılarak t-değerinin hesaplanabilmesi için ilk olarak $S_{(b_A - b_B)}$, yani regresyon katsayıları arasındaki farkın standart hatasının hesaplanması gerekir.

2 ay ve 3 ay süt verilen kuzulara ait regresyondan sapma kareler ortalamaları (5.28) numaralı eşitlikten;

$$S^2_{e_1} = \frac{50.729 - 3.06(11.32)}{7-2} \cong 3.218,$$

$$S^2_{e_2} = \frac{12.295 - 2.52(2.618)}{8-2} \cong 0.950,$$

Regresyondan sapma kareler ortalamalarının serbestlik dereceleri ile tartılı ortalaması (5.35) numaralı eşitlik kullanılarak;

$$S^2_e = \frac{(7-2)3.218 + (8-2)0.95}{(7-2)+(8-2)} \cong 1.981\ ,$$

Regresyon katsayıları arasındaki farkın standart hatası (5.34) numaralı eşitlik kullanılarak;

$$S_{(b1-b2)} = \sqrt{1.981\left(\frac{1}{3.7} + \frac{1}{1.039}\right)} \cong 1.563\ ,$$

ve (8.10) numaralı eşitlikten de;

$$t = \frac{3.06 - 2.52}{1.563} \cong 0.345$$

olarak hesaplanan t-değeri [(7-2) +(8-2)]=11 serbestlik dereceli t-dağılımı gösterir. Araştırıcı I. tip hata olasılığını α=0.01 olarak belirlemiş ise tek taraflı hipotez kontrolü yapıldığı için Tablo C'den, 11 serbestlik dereceli t-dağılımında %1'lik alanın, yani kontrol hipotezinin ret bölgesinin 2.718 değerinden başladığı görülür. Hesaplanan test istatistiğinin değeri 0.345 olup kritik bölgenin başladığı t-değerinden çok küçüktür ve H_0 hipotezinin kabul bölgesine düşmektedir. Bu sebeple kontrol hipotezi kabul edilir.

Tablo 8.16'da uygulanan hipotez kontrolü sonunda verilen karar doğrultusunda 2 ay süt verilen kuzularda doğum ağırlığındaki 1 kg'lık artışa karşılık 3.ay canlı ağırlığında ortalama olarak gözlenen artışın, 3 ay süt verilen kuzularda gözlenen artıştan daha fazla olduğu söylenemez. İki grup arasında 1 kg'lık artışa karşılık 3.ay canlı ağırlıkta ortalama olarak gözlenen artış bakımından farkın tesadüften ileri geldiği ve sıfır kabul edilebileceği kararına varılır.

8.3. SORULAR

1. t-dağılımı nasıl elde edilir açıklayınız?
2. t-dağılımının özellikleri nelerdir? Açıklayınız.

3. t-dağılımının varyansı neye göre değişir ve nasıl hesaplanır?
4. 10 serbestlik dereceli teorik t-dağılımı, deneysel olarak nasıl elde edilir? Açıklayınız.
5. Z-dağılımı ile t-dağılımı arasında ne gibi farklar vardır? Açıklayınız.
6. Uykusuzluktan şikâyetçi 20 hasta tesadüfen iki eşit gruba ayrılmış, bunlardan birine A uyku ilacı, diğerine de B uyku ilacı verilmiştir. Bu uygulamadan sonra söz konusu hasta gruplarının uyku süresi (saat) ortalamaları ve standart hataları sırası ile $\overline{A} \pm S_{\overline{A}}$ = 3.5±0.70, $\overline{B} \pm S_{\overline{B}}$ = 4.5±0.90 olarak bulunmuştur. Buna göre B ilacının uykusuzluğa karşı daha etkili olduğu söylenebilir mi?
7. R ve S gibi iki farklı ilacın sistolik kan basıncına etkisini araştırmak üzere seçilen 12 kişi 7 ve 5 kişilik iki gruba ayrılmış, bir gruba R, diğer gruba S ilacı verilmiştir. Sonuçlar aşağıdaki gibi bulunduğuna göre R ve S ilaçları arasında sistolik kan basıncına etki bakımından fark var mıdır?

R :	110	120	125	130	120	120	115
S :	125	130	125	130	135		

4. Tesadüfen seçilen 125 bireyde yaş ile kan basıncı arasında korelasyon katsayısı 0.81 olarak bulunmuştur. İki özellik arasında doğrusal bir ilişkinin olduğu söylenebilir mi?
5. Belirli bir ırka ait 18 adet fare, biri kontrol grubu (A), diğeri de deney grubu (B) olmak üzere eşit sayıda birey içeren rasgele iki gruba ayrılmış ve doğumdan 3 aylık oluncaya kadar deney grubu özel bir gıda rejimi ile beslenmiştir. Belirlenen süre sonunda grupların canlı ağırlık ortalamaları ve standart hataları sırasıyla $\overline{A} \pm S_{\overline{A}}$ = 45.6 ± 3.8 ve $\overline{B} \pm S_{\overline{B}}$ = 40.75 ± 2.1 olarak bulunmuştur. Uygulanan rejimin ortalama canlı ağırlığı değiştirip değiştirmediğini kontrol ediniz.
6. Birbirinden bağımsız iki grup (muamele; uygulama) ortalamasını karşılaştırmak için gerekli olan test istatistiği nasıl hesaplanır? Açıklayınız.
7. Birbirine bağımlı gözlemlerden elde edilmiş iki grubu karşılaştırmak için gerekli olan t-istatistiğinin Serbestlik Derecesinin 20 olabilmesi için örnekteki deney ünitesi adedi kaç olmalıdır? Nedenini belirterek açıklayınız.
8. Ortalaması ve varyansı bilinmeyen bir populasyondan rasgele alınan 25 bireylik bir örnekte, örnek ortalaması $\overline{X}$ = 12. ve standart sapması da S_x= 5. olarak hesaplanmıştır. Bu örnekte α = 0.05 yanılma olasılığı ile $H_0 : \mu = 10$ kontrol hipotezi, $H_1 : \mu < 10$ hipotezine karşı test edildiği zaman verilecek karar nedir? Gerekli kontrolleri yaparak açıklayınız.
9. 8 bireyin H ve P gibi iki özelliği arasında hesaplanan korelasyon katsayısı 0.6 olarak hesaplanmıştır. Bu iki özellik arasında doğrusal bir ilişki olmadığı söylenebilir mi? Gerekli kontrolleri yaparak karar veriniz.
10. 20 Adet mandalina ağacı tesadüfen A ve B gibi 2 eşit gruba bölünmüş, gruplardan biri kontrol grubu (A Grubu) olarak ayrılmış, diğer gruptaki (B Grubundaki) ağaçların gövdesine belirli bir eriyik sürülmüştür. Deneme sonunda kontrol grubunun ortalaması $\overline{A}$ = 30.0 kg/ağaç, standart sapması S_A=2.0, eriyik sürülen grubun ortalaması $\overline{B}$ = 32.0 kg/ağaç, standart sapması da S_B=3.0 olarak bulunmuştur. Eriyik sürme mandalina verimini etkilemiş midir?
11. Bir örnekten hesaplanan ortalamanın bilinen bir ortalamayla karşılaştırılması için gerekli olan t-istatistiği nasıl hesaplanır? Örnek vererek açıklayınız.
12. Eş-yapma t-testi hangi durumlarda kullanılmalıdır? Örnek vererek açıklayınız.

13. A firmasının ürettiği vitamin drajelerinden rasgele alınan 16 vitamin drajesinde B_1 vitamini miktarı ortalaması 20. mg ve standart sapması 0.2 mg, B firmasının ürettiği vitamin drajelerinden alınan 16 vitamin drajesinde B_1 vitamini miktarı ortalaması 20.5 mg ve standart sapması da 0.3 mg olarak bulunmuştur. Vitamin drajelerindeki B_1 vitamini miktarı bakımından A ve B firmaları arasındaki farklılığın tesadüfi olduğu söylenebilir mi?

16. Birbirine bağımlı gözlemlerden elde edilmiş iki ortalamayı karşılaştırmak için gerekli olan t-istatistiğinin Serbestlik Derecesinin 43 olabilmesi için örnekteki deney ünitesi sayısı kaç olmalıdır? Açıklayınız.

15. 5 sağlıklı bireyde sabah ve akşam ölçülen kan şekerleri miktarı aşağıdaki gibi bulunmuştur. Sabah ve akşam ölçülen kan şekerleri miktarı arasındaki farkın istatistik olarak önemli olduğunu söyleyebilir misiniz?

Sabah	Akşam
90	91
95	95
98	97
94	95
94	95

16. İki farklı karışım kullanılarak yapılan dondurmaların % yağ miktarlar aşağıdaki gibi bulunmuştur. Karışımlar arasında ortalama % yağ oranları bakımından farkın tesadüfî olup olmadığını kontrol ediniz.

Karışım1	5.7	4.5	6.2	6.3
Karışım2	6.3	5.7	5.9	6.4

17. Belirli bir hibrit mısırda koçan uzunlukları ortalamasının μ = 23 cm. olduğu bilinmektedir. Söz konusu hibrit mısırın ekili olduğu parsellere, yeni bir gübre karışımı uygulanmış ve 25 parselde ortalama koçan uzunluğu, $\overline{X}$ = 28. cm, standart sapma da S_x = 5. cm olarak bulunmuştur. Yeni gübre karışımının koçan uzunluğunu artırdığı söylenebilir mi? Kontrol ederek karar veriniz.

18. Yoğurtlarda maya gelişiminin zamana göre değişip değişmediğini araştırmak amacıyla, 20 adet yoğurt kâsesinin bulunduğu bir inkübasyon dolabından, mayalama işleminden 1 saat ve 7 saat sonra maya sayımı yapılmış ve elde edilen sayısal değerler kaydedilmiştir. 1 saat ve 7 saat sonraki maya sayımları arsasında farkların istatistik olarak önemli olup olmadığını test etmek için kullanılması gereken yöntem nedir? Açıklayınız.

19. Bir bölgedeki 205 adet parselde mercimek ekiminden önce ve mercimek ekiminden sonra topraktaki azot miktarları tespit edilmiştir. Bu parsellerdeki mercimek ekiminin topraktaki azot miktarını değiştirip değiştirmediği araştırılmak istense elde edilen sayısal değerler yardımı ile hangi hipotez testi yöntemi kullanılmalıdır? Açıklayınız.

20. 6 bireyin X ve Y gibi iki özelliği arasında hesaplanan korelasyon katsayısı 0.6 olarak hesaplanmıştır. Bu iki özellik arasında doğrusal bir ilişki olmadığı söylenebilir mi?

21. A ve B firmaları tarafından üretilen anti bakteriyel el temizleme jellerinde pH değerleri ölçülmüş ve aşağıdaki istatistikler hesaplanmıştır. A ve B firmalarına ait jellerdeki pH değerlerinin ortalamaları arasındaki farkın önemli olup olmadığına karar veriniz.

	n	Ortalama	Standart Hata
A-firması	10	5.51	0.03
B-firması	10	5.61	0.02

22. Astım hastalarına yeni bir tedavi uygulanmış ve tedavinin etkinliğini görmek amacıyla tedavi öncesinde ve tedavi sonrasında, saniyedeki baskılı ekspiratuar hacmi (FEV_1) değerleri ölçülmüştür. Buna göre yeni tedavi FEV_1 ölçümlerinin yükselmesini sağlamış mıdır?

Hasta	Tedavi Öncesi	Tedavi Sonrası
1	1.69	1.69
2	2.77	2.22
3	1.00	3.07
4	1.66	3.35
5	3.00	3.00
6	0.85	2.74

23. 10 bireyden elde edilen veriler kullanılarak X ve Y özellikleri arasındaki korelasyon katsayısı -0.899 ve regresyon denklemi $\hat{Y} = 8.68 - 0.109X$ olarak hesaplanmıştır. X ve Y özellikleri arasında doğrusal ilişki bulunduğu söylenebilir mi? Kontrol ederek karar veriniz.
24. Belirli bir özellik bakımından A ve B gruplarında ortalama, varyans ve örnek genişliği aşağıdaki gibidir. A ve B gruplarının ortalamaları arasındaki fark tesadüften mi ileri gelmektedir?

$\overline{A} = 1.5$	$S_A^2 = 2.5$	$n_A = 25$
$\overline{B} = 16.5$	$S_B^2 = 5.29$	$n_B = 36$

25. 10 bireyde boy uzunlukları ile tüketilen süt miktarı arasındaki korelasyon katsayısı 0.56 olarak bulunmuştur. Buna göre bu 10 bireyin alındığı populasyonda, bu iki özellik bakımından doğrusal bir ilişki var mıdır?
26. 81 bireyde sağ ve sol kulak ile algılanabilen ses şiddetleri arasındaki farkların ortalaması 0.6 farkların standart sapması 0.27 olarak bulunmuştur. Sağ ve sol kulak ile algılanabilen ses şiddetleri arasındaki fark tesadüften mi ileri gelmektedir?
27. Türkiye'deki hastanelerinin mikrobiyoloji laboratuvarlarında yapılan testlerdeki hata oranının 0.10 olduğu bilinmektedir. Yeni açılan bir hastanenin mikrobiyoloji laboratuvarında yapılan ölçümlerden tesadüfi olarak seçilen 100 sonuçtan 13 tanesinin hatalı olduğu gözlemiştir. Yeni açılan hastanenin laboratuvar sonuçlarındaki hata oranını populasyondan daha fazla mıdır?
28. 5 sağlıklı bireyde sabah ve akşam ölçülen kan şekerleri miktarları aşağıdaki gibi bulunmuştur.

Birey	Sabah	Akşam
1	90	91
2	95	95
3	98	97
4	94	95
5	94	95

Sabah ve akşam ölçülen kan şekeri miktarları arasında istatistik olarak önemli bir farkın olduğunu söyleyebilir misiniz?

29. Bir diyet programının zayıflama üzerine etkisini araştırmak amacıyla tesadüfen seçilen 6 bireyin, başlangıç ve 2 aylık diyet programı sonrası ağırlıkları aşağıdaki gibi ölçülmüştür. Uygulanan bu diyet programının ağırlıkta önemli bir azalmaya sebep olduğu söylenebilir mi?

Başlangıç	72	70	65	80	75	70
Diyet Sonrası	70	68	62	70	74	69

30. 6 adet vitamin drajesinin üretimden hemen sonra ve depoda belirli bir süre bekletildikten sonraki pH değerleri aşağıdaki gibi tespit edilmiştir. Depolamadan sonra pH değerlerinde istatistik olarak önemli bir değişim olmuş mudur?

Başlangıç :	6.45 7.02 7.15 7.12 7.05 7.3
Depolamadan sonra:	5.04 5.08 6.02 5.80 5.75 6.0

31. 8 serbestlik dereceli teorik t-dağılımı, deneysel olarak nasıl elde edilir? Bu dağılımın ortalaması ve varyansı kaça eşittir? Bu dağılımı oluşturan t-değerleri %90 olasılıkla hangi değerler arasındadır?

32. Aynı yaş ve cinsiyetteki bebeklerden tesadüfen seçilen 5'ine A maması 7'sine B maması verilmiş ve bebeklerin 6. ayın sonundaki ağırlıkları (kg) aşağıdaki gibi bulunmuştur. Mamalar arasında 6. ayın sonundaki ağırlığı etkileme bakımından istatistik olarak önemli bir fark var mıdır?

A (kg)	8.0	9.5	9.2	8.6	8.7		
B (kg)	7.6	8.2	9.3	8.5	7.9	9.6	9.0

33. 90 adet bıldırcında yumurtadan çıkış ağırlığı ile 2. Hafta canlı ağırlığı arasındaki korelasyon katsayısı r=0.25 olarak bulunmuştur. Bıldırcınlarda adı geçen özellikler arasında hesaplanan korelasyon katsayısı istatistik olarak önemli midir?

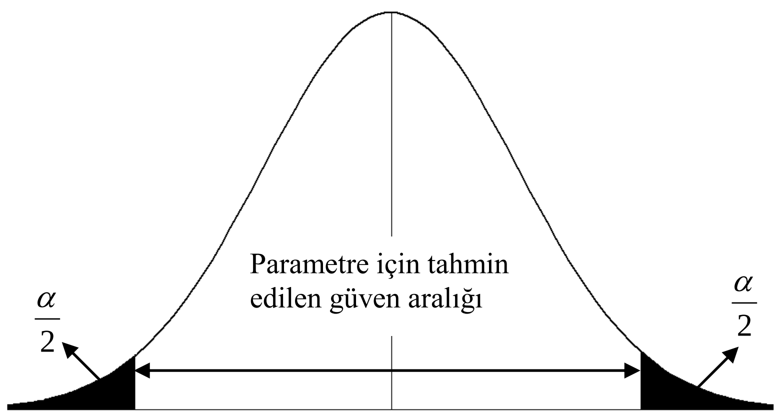
GÜVEN ARALIĞI

9.1. GİRİŞ

Yapılan çalışmaların çoğunda araştırıcı populasyon parametreleri hakkında bilgi sahibi olmayabilir. Bu durumda populasyonu temsil edecek şekilde tesadüfen alınan örnekten hesaplanan istatistik, populasyon parametresinin bir tahminidir.

,Eğer örnekten hesaplanan istatistiğe ait örnekleme dağılımının parametreleri biliniyor veya örnekten tahmin ediliyor ise belirli bir olasılık ile populasyon parametresinin içinde bulunduğu aralık tahmin edilebilir. Aralığı tahmin etmek için iki nokta hesaplanır. Üzerinde çalışılan populasyonun bilinmeyen parametresi belirli bir olasılık ile bu iki nokta arasında yer alır. Bu iki noktanın belirlediği aralığa **güven aralığı** denir. Hesaplanan iki noktadan biri güven aralığının **alt sınırı**, diğeri ise **üst sınırı**dır.

Populasyonun bilinmeyen parametresi için tahmin edilecek güven aralığı, güven aralığının sınırları ve olasılıkları, Şekil 9.1'de gösterilmiştir. Şekil 9.1'de gösterilen güven aralığı; populasyonun bilinmeyen parametresinin (1-α) olasılıkla hesaplanan alt ve üst sınırlar arasında, yani tahmin edilen güven aralığı içinde olduğunu, α olasılıkla tahmin edilen güven aralığının dışında olduğunu gösterir. (1-α) olasılığına güven katsayısı veya güvenilirlik derecesi de denir.



Şekil 9.1. Populasyon parametresine ait güven aralığı

Populasyon parametresi için tahmin edilecek güven aralığı, parametresi bilinmeyen populasyondan tesadüfen alınan örneğin genişliğine, örnekteki bireyler arasındaki değişime ve belirlenen olasılığa bağlı olarak değişir. Populasyondan tesadüfen alınan örnekler aynı örnek genişliğinde olsa bile aynı olasılıkla her bir örnek için tahmin edilecek güven aralığı örnekteki bireyler arasındaki değişime bağlı olarak farklı olabilir.

Tahmin edilen güven aralığı daraldıkça yapılan tahminin güvenilirliği artacağı gibi, üzerinde çalışılan örneğin genişliği arttıkça ve/veya örnekteki bireyler arası değişim azaldıkça da tahmin edilen güven aralığı daralır ve güvenilirliği artar.

Populasyonun bilinmeyen parametresi için tahmin edilen güven aralığı kullanılarak hipotez kontrolü de yapılabilir.

9.2. Ortalamanın Güven Aralığı

Üzerinde çalışılan örnek ortalaması bilinmeyen bir populasyonu temsil ediyorsa, populasyon ortalamasının (1-α) olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığı tahmin edilebilir.

BÖLÜM 5'te açıklandığı gibi, ortalaması μ ve standart sapması σ olan normal dağılım gösteren populasyondan belirli örnek genişliğinde (n) geriye iadeli olarak mümkün olan sayıda örneklerden hesaplanan ortalamaların dağılımına "**ortalamaya ait örnekleme dağılımı**" denir.

Bu dağılımın ortalaması populasyon ortalamasına (μ_x) eşittir. Standart sapması, eğer populasyon varyansı (veya standart sapması) biliniyor ise (5.1) numaralı, eğer bilinmiyor ise (5.2) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

Normal dağılım gösteren ortalamalara ait örnekleme dağılımını oluşturan ortalamalar (5.3) numaralı eşitlik kullanılarak standart normal dağılıma (Z-dağılımına) dönüştürülebilir.

Örnekten hesaplanan ortalamaya karşılık gelen Z-değeri (1-α) olasılıkla $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ ile $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ arasında olup;

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha \text{ şeklinde yazılabilir.} \qquad (9.1)$$

(9.1) numaralı eşitlikte Z yerine (5.3) numaralı eşitlik yazılarak (9.2) numaralı eşitlik,

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha \qquad \ldots(9.2)$$

(9.2) numaralı eşitlikte, eşitsizliğin iki tarafını $\sigma_{\overline{X}}$ ile çarparak eşitlik;

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_{\overline{X}} < \overline{X}-\mu_{\overline{X}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_{\overline{X}})=1-\alpha$$

şeklinde düzenlenebilir. Eşitsizliğin her iki tarafından $\overline{X}$ çıkarılıp, her terim (-1) ile çarpılarak populasyon ortalamasının (1-α) olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığı (9.3) numaralı eşitlikte verildiği gibi düzenlenebilir.

$$P(\overline{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_{\overline{x}} < \mu_x < \overline{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_{\overline{x}})=1-\alpha \qquad \ldots(9.3)$$

(9.3) numaralı eşitlikte ($\overline{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}$), populasyon ortalamasının alt sınırı ($\overline{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}$), populasyon ortalamasının üst sınırı ve (1-α) olasılık, güvenilirlik derecesi veya güven katsayısıdır. Populasyon ortalamasının alt sınırı (μ_{x_A}) ve üst sınırı (μ_{x_U}) ile gösterilerek güven aralığı $\mu_{x_{A,U}}=\overline{X}\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}$ şeklinde de yazılabilir.

Üzerinde çalışılan populasyonun standart sapması da bilinmiyor ise ortalamaya ait örnekleme dağılımının standart sapması (5.2) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır. Bu durumda örnekten hesaplanan ortalama (8.1) numaralı eşitlik kullanılarak standardize edilir. Bu durumda populasyon ortalaması için güven aralığı tahmin edilirken standart normal dağılım yerine t-dağılımı kullanılır ve (9.3) numaralı eşitlik (9.4) numaralı eşitlikte verildiği şekilde düzenlenir.

$$P(\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\overline{x}} < \mu_x < \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\overline{x}}) = (1-\alpha) \qquad ...(9.4)$$

(9.4) numaralı eşitlikte $t_{\frac{\alpha}{2}}$, örneğe ait serbestlik derecesinde Tablo C'den bakılan çift taraflı t-dağılımı değeridir.

ÖRNEK 1:

Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğunun standart sapması $\sigma = 0.3$ mm olan bir normal dağılım gösterdiği bildirilmiştir. Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğu ortalamasını araştırmak için tesadüfen alınan 25 arıda dil uzunluğu ortalaması 7.05 mm olarak bulunmuştur. Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğu ortalamasının %95 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığını hesaplayınız.

Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğuna ait populasyondan tesadüfen seçilen 25 arılık çok sayıda örnekler alınsa ve ortalamalar hesaplansa, hesaplanan bu ortalamaların standart sapmasının (5.1) numaralı eşitlik kullanılarak $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{0.3}{\sqrt{25}}$ =0.06 olması beklenir.

Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğu ortalamasının %95 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığı istendiği için (1-α)=0.95'dir. Buradan α=0.05 olarak bulunur. Örnekten hesaplanan ortalamaya karşılık gelen Z değeri (9.1) numaralı eşitlikte verildiği gibi (1-α) olasılık ile -Z ile +Z arasındadır. Bu sebeple α'nın yarısı standart normal dağılımda ortalamadan küçük Z-değerlerinin bulunduğu, diğer yarısı ise ortalamadan büyük Z-değerlerinin bulunduğu tarafta alınır. Standart normal dağılımda %2.5'luk alan ±1.96 değerinden başlamaktadır.

Örnekten hesaplanan ortalamanın standart sapması ve Z-dağılımında %2.5'luk alanın başladığı Z-değeri belirlendikten sonra Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğu ortalamasının %95 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığı (9.3) numaralı eşitlikten;

$$P(7.05-(1.96)(0.06) < \mu_x < 7.05+(1.96)(0.06) = 0.95$$
$$P(6.932 < \mu_x < 7.168) = 0.95$$

olarak tahmin edilir. Bunun anlamı Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğu ortalaması %95 olasılık ile 6.932 mm ve 7.168 mm arasında olup, %5 olasılıkla da bu sınırların dışındadır.

Örnekten hesaplanan ortalamaya ait güven aralığı belirlenen olasılık ile tahmin edildikten sonra hipotez kontrolü de yapılabilir. Örneğin, 7.2.1 numaralı bölümde ÖRNEK 1'de Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğu ortalamasının 7.2 mm kabul edilip edilemeyeceği kontrol edilmiş ve söz konusu arı ırkında dil uzunluğunun 7.2 mm kabul edilemeyeceği kararına varılmıştı.

Araştırıcı güven aralığını yukarıdaki şekilde tahmin etmiş ise aynı kontrol, tahmin edilen güven aralığından yararlanılarak da yapılabilir. Tahmin edilen güven aralığı Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğu ortalamasının %95 olasılık ile 6.932 mm ve 7.168 mm arasında olduğunu göstermektedir. Bu aralık 7.2 mm değerini içermediği için söz konusu örneğin Kafkas ırkı arı populasyonuna ait olmadığı sonucuna varılabilir.

Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğu ortalamasının 7.1 mm olup olmadığı kontrol ediliyor olsaydı, güven aralığı %95 olasılık ile bu değeri içerdiği için söz konusu örneğin Kafkas ırkı arı populasyonuna ait olduğu sonucuna varılırdı.

ÖRNEK 2:

Sarıkuyruk balığı yetiştiriciliğinde kullanılan yemi üreten bir fabrikadan tesadüfen alınan 31 adet yem örneğinde protein oranı ortalamasının %20 ve standart sapmasının da %5 olduğu tespit edilmiştir. Bu fabrikada üretilen yemlerin ortalama protein oranının %90 ve %95 olasılıklar ile hangi değerler arasında olduğunu hesaplayınız.

Fabrikada üretilen yemlerin protein oranlarına ilişkin dağılımın ortalaması ve standart sapması hakkında herhangi bir bilgi verilmemiştir. Bu fabrikada üretilen yemlerin protein oranlarına ait ortalama ve standart sapma tesadüfen alınan 31 yem örneğinden $\overline{X}$=%20 ve S_x= %5 olarak hesaplanmıştır. Üretilen yemlerin protein oranlarına ait standart sapma bilinmediği için 31 yem örneğinden hesaplanan ortalamaya ait standart sapma (5.2) numaralı eşitlikten $S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{31}}$ =0.898 olarak hesaplanır.

Populasyona ait standart sapma bilinmediği için örnekten hesaplanan ortalama (8.1) numaralı eşitlik kullanılarak standardize edilerek t-değerine dönüştürülür. Bu durumda populasyon ortalaması için güven aralığı (9.4) numaralı eşitlik kullanılarak;

$$P(\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\bar{x}} < \mu_x < \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\bar{x}}) = (1-\alpha)$$

şeklinde tahmin edilir.

Üretilen yemlerin protein oranlarının %90 olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığı hesaplanırken α değeri, (1-α)=0.90'dan, %10 olarak belirlenir. (9.4) numaralı eşitlikte t-değeri, (n-1)=(31-1)=30 serbestlik t-dağılımında %5'lik alanın başladığı t-değeridir. Tablo C'de 30 serbestlik dereceli t-dağılımında %5'lik alan 1.697 değerinden başladığından (9.4) numaralı eşitlikten üretilen yemlerin protein ortalamalarının %90 olasılık ile içinde bulunduğu aralık;

$$P(20-(1.697)(0.898) < \mu_x < 20+(1.697)(0.898)) = 0.90$$

$$P(18.476 < \mu_x < 21.524) = 0.90$$

olarak tahmin edilir. Tahmin edilen güven aralığı üretilen yemlerin protein oranlarının %90 olasılıkla 18.476 ve 21.524 değerleri arasında olduğunu gösterir.

Üretilen yemlerin protein oranlarının %95 olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığı hesaplanırken de α değeri, (1-α)=0.95'den, %5 olarak belirlenir. (9.4) numaralı eşitlikte t-değeri, (n-1)=(31-1)=30 serbestlik t-dağılımında %2.5'luk alanın başladığı t-değeridir. Tablo C'de 30 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'luk alan 2.042 değerinden başladığından (9.4) numaralı eşitlikten üretilen yemlerin protein ortalamalarının %95 olasılık ile içinde bulunduğu aralık;

$$P(20-(2.042)(0.898) < \mu_x < 20+(2.042)(0.898)) = 0.95$$

$$P(18.166 < \mu_x < 21.834) = 0.95$$

olarak tahmin edilir. Tahmin edilen güven aralığı üretilen yemlerin protein oranlarının %95 olasılık ile 18.166 ve 21.834 arasında olduğunu gösterir.

Daha önce açıklandığı gibi tahmin edilen güven aralığı hipotez kontrolü için de kullanılabilir.

9.3. Birbirlerinden Bağımsız Ortalamalar Arasındaki Farkın Güven Aralığı

Ortalaması bilinmeyen ve standart sapması σ olan bir normal dağılım gösteren bir populasyondan n_A ve n_B genişliğinde birbirlerinden bağımsız tesadüf örnekleri alınsa ve bu örneklerden hesaplanan ortalamalar tesadüfen yan yana getirilerek ortalamalar arasındaki farklar bulunsa bu farkın standart sapması (σ_D) (5.4) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

Normal dağılımdan elde edilen birbirlerinden bağımsız ortalamalar arası farka ait örnekleme dağılımı normal dağılım gösterdiği için hesaplanan ortalamalar arası fark (5.5) numaralı eşitlik kullanılarak standardize edilir ve standart normal dağılıma dönüştürülür.

Hesaplanan ortalamalar arası farka karşılık gelen Z-değeri (1-α) olasılıkla $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ ile $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ arasında olup;

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha \quad \text{şeklinde yazılabilir.} \qquad (9.5)$$

(9.5) numaralı eşitlikte Z yerine (5.5) numaralı eşitlik yazılarak ve ortalamalara ait güven aralığında açıklandığı şekilde düzenlenerek ortalamalar arası farka $(\bar{A}-\bar{B})$ ait güven aralığı (9.6) numaralı eşitlikteki gibi verilebilir.

$$P[(\bar{A}-\bar{B})-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_D < \mu_D < (\bar{A}-\bar{B})+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_D] = (1-\alpha) \qquad \ldots (9.6)$$

(9.6) numaralı eşitlikte $(\bar{A}-\bar{B})-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_D$, ortalamalar arası farkın alt sınırı, $(\bar{A}-\bar{B})+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_D$, ortalamalar arası farkın üst sınırı ve (1-α) olasılık, güvenilirlik derecesi veya güven katsayısıdır.

Eğer örneklerin tesadüfen alındığı populasyona ait standart sapma, σ, bilinmiyor ise ortalamalar arası farkın standart sapması (5.7) numaralı eşitlik kullanılarak tahmin edilir. Bu durumda ortalamalar arasında gözlenen farkın $(\bar{A}-\bar{B})$ güven aralığı (9.6) numaralı eşitlikte Z-dağılımı yerine t-dağılımı ve σ_D yerine S_D kullanılarak (9.7) numaralı eşitlikte verildiği gibi düzenlenir.

$$P[(\bar{A}-\bar{B})-t_{\frac{\alpha}{2}}S_D < \mu_D < (\bar{A}-\bar{B})+t_{\frac{\alpha}{2}}S_D]=(1-\alpha) \qquad \ldots (9.7)$$

(9.7) numaralı eşitlikte $t_{\frac{\alpha}{2}}$, [(n_A-1)+(n_B-1)] serbestlik dereceli Tablo C'den bakılan çift taraflı t-dağılımı değeridir.

ÖRNEK 1:

Bir fakültede okutulan istatistik dersi final notlarının, standart sapması 8 olan normal dağılım gösterdiği bilinmektedir. Listeden tesadüfen seçilen 16 erkek öğrencinin notlarının ortalaması 75, 25 kız öğrencinin notlarının ortalaması ise 78 olarak bulunmuştur. Kız ve erkek öğrencilerin aldıkları notlar arasındaki farkın %95 olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığını hesaplayınız.

Kız ve erkek öğrencilerin not ortalamaları arasındaki farkın %95 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığı hesaplanacağından (1-α)=0.95 ve buradan α=0.05 olup, standart normal dağılımda %2.5'lik alan ±1.96 değerinden başlamaktadır.

Bir fakültede okutulan istatistik dersi final notlarının standart sapması 8 olan normal dağılım gösterdiği ve listeden tesadüfen seçilen 16 erkek öğrencinin notlarının ortalaması 75, 25 kız öğrencinin notlarının ortalaması ise 78 olarak bulunduğuna göre, birbirlerinden bağımsız iki örnek ortalaması arasındaki farka ait standart sapma (5.4) numaralı eşitlik kullanılarak;

$$\sigma_D = \sigma\sqrt{\frac{(n_A + n_B)}{n_A n_B}} = 8\sqrt{\frac{(25+16)}{(25)(16)}} = 2.561 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnekten hesaplanan ortalamalar arası farkın standart sapması ve Z-dağılımında %2.5'luk alanın başladığı Z-değeri belirlendikten sonra kız ve erkek öğrencilerin aldıkları notlar arasındaki farkın %95 olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığı (9.6) numaralı eşitlikten;

$$P((75-78)-(1.96)(2.561) < \mu_D < (75-78)-(1.96)(2.561)) = (1-\alpha)$$

$$P(-8.02 < \mu_D < 2.02) = 0.95$$

olarak tahmin edilir. Tahmin edilen güven aralığı kız ve erkek öğrencilerin not ortalamaları arasındaki farkın %95 olasılıkla -8.02 ile 2.02 arasında olduğunu göstermiştir.

Kız ve erkek öğrencilerin aldıkları notlar arasındaki farkın %95 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığı (9.6) numaralı eşitlikten tahmin edildikten sonra "**kız ve erkek öğrencilerin not ortalamaları arasındaki farklın istatistik olarak önemli olup olmadığı**" kontrol edilebilir. Eğer kız ve erkek öğrencilerin not ortalamaları arasında gözlenen fark istatistik olarak önemli değilse not ortalamaları arasındaki farkın sıfır olması gerekir. Not ortalamaları arasındaki fark için %95 olasılık ile tahmin edilen güven aralığı -8.02 ile 2.02 arasında olup, sıfır (0) değerini içermektedir. Bu sebeple tahmin edilen güven aralığına dayanarak kız ve erkek öğrencilerin arasında söz konusu dersten alınan notlar bakımından fark olmadığı kararına varılır.

ÖRNEK 2:

Uykusuzluktan şikâyetçi 25 hastadan tesadüfen seçilen 10 tanesine A uyku ilacı, diğer 15 tanesine ise B uyku ilacı verilmiştir. Bu uygulamadan sonra söz konusu hasta gruplarının uyku süresi (saat) ortalamaları ve standart hataları sırası ile $\overline{A} \pm S_{\overline{A}}$ = 3.5 ± 0.70 ve $\overline{B} \pm S_{\overline{B}}$ = 4.5± 0.90 olarak bulunmuştur. A ve B ilaçları ile tedavi edilen grupların ortalama uyku süreleri arasındaki farkın %99 olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığını hesaplayınız.

Populasyona ait standart sapma bilinmediği için örnekten hesaplanan ortalama (8.1) numaralı eşitlik kullanılıp standardize edilerek t-değerine dönüştürülür. Bu durumda ortalamalar arası farkın güven aralığı (9.7) numaralı eşitlik kullanılarak;

$$P(((\overline{A} - \overline{B}) - t_{\frac{\alpha}{2}} S_D < \mu_D < (\overline{A} - \overline{B}) + t_{\frac{\alpha}{2}} S_D)) = (1-\alpha)$$

şeklinde tahmin edilir.

A ve B uyku ilacı alan hasta gruplarının uyku süreleri ortalamaları arasındaki farkın %99 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığı hesaplanacağından (1-α)=0.99 ve buradan α=0.01 olarak belirlenir. (9.7) numaralı eşitlikte t-değeri, (10-1)+(15-1)=23 serbestlik t-dağılımında %0.5'lik alanın başladığı Tablo C'den bulunan 2.807 değeridir.

A ve B uyku ilacı alan hasta gruplarının uyku sürelerine ait kareler toplamları ve uyku süreleri ortalamaları arasındaki farka ait standart hata (5.7) numaralı eşitlikten,

$$\sum d_A^2 = (0.7)^2.10.(10-1) = 44.1$$
$$\sum d_B^2 = (0.9)^2.15.(15-1) = 170.1$$

$$S_D = \sqrt{\frac{44.1+170.1}{(10-1)+(15-1)}\frac{10+15}{(10)(15)}} \cong 1.246 \text{ olarak hesaplanır.}$$

A ve B uyku ilacı alan hasta gruplarının uyku süreleri arasındaki farkın standart hatası ve t-dağılımında %0.5'lik alanın başladığı t-değeri belirlendikten sonra A ve B uyku ilacı alan hasta gruplarının uyku süreleri arasındaki farkın %99 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığı (9.7) numaralı eşitlikten;

$$P((3.5-4.5)-(2.807)(1.246) < \mu_D <(3.5-4.5)-(2.807)(1.246)) = 0.99$$
$$P(-4.498< \mu_D <2.498)=0.99$$

olarak tahmin edilir. Tahmin edilen güven aralığı A ve B uyku ilacı alan hasta gruplarının uyku süreleri arasındaki farkın %99 olasılıkla -4.498 ile 2.498 arasında olduğunu göstermiştir.

A ve B uyku ilacı alan hasta gruplarının uyku süreleri arasındaki farkın %99 olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığı (9.7) numaralı eşitlikten tahmin edildikten sonra "**A ve B uyku ilacı alan hasta gruplarının uyku süreleri arasındaki farkın istatistik olarak önemli olup olmadığı**" kontrol edilebilir. Eğer A ve B uyku ilacı alan hasta gruplarının uyku süreleri arasında gözlenen fark istatistik olarak önemli değilse not ortalamaları arasındaki farkın sıfır olması gerekir. Uyku süreleri arasındaki fark için %99 olasılık ile tahmin edilen güven aralığı -4.498 ile 2.498 arasında olup sıfır (0) değerini içermektedir. Bu sebeple tahmin edilen güven aralığına dayanarak A ve B uyku ilaçları arasında ortalama uyku süreleri bakımından fark olmadığı kararına varılır.

9.4. Korelasyon Katsayısına ait Güven Aralığı

X ve Y özelliklerine ait bir örnekten hesaplanan korelasyon katsayısı populasyona ait korelasyon katsayısının, ρ'nun bir tahminidir. Eğer istenirse populasyona ait korelasyon katsayısının içinde bulunduğu güven aralığı (1-α) olasılıkla tahmin edilebilir.

Korelasyon katsayısı ρ olan bir populasyondan belirli örnek genişliğinde mümkün olan sayıda seçilen tesadüf örneklerinden hesaplanan X ve Y özellikleri arasındaki korelasyon katsayılarının gösterdiği dağılıma "**korelasyon katsayılarına ait örnekleme dağılımı**" dendiği BÖLÜM 5'te açıklanmıştı. Bu dağılımın ortalaması, μ_r, populasyondaki korelasyon katsayısına eşittir, yani $\mu_r=\rho$'dur. Dağılımının standart sapması ise (5.15) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

Örneklerin alındığı populasyona ait korelasyon katsayısı, $\rho\neq0$ olduğu zaman bu populasyondan elde edilecek korelasyon katsayısına ait örnekleme dağılımının normal dağılım göstermesi için her bir örnekten hesaplanan korelasyon katsayısının Tablo B veya (5.17) numaralı eşitlik kullanılarak Z_r-değerlerine dönüştürülmesi gerekir. Hesaplanan Z_r-değerleri ortalaması (μ_{Z_r}) (5.18) ve standart sapması (5.19) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanan normal dağılım gösterirler.

Korelasyon katsayısı, $\rho \neq 0$ olan bir populasyondan alınan örneklerden hesaplanan korelasyon katsayıları (5.17) numaralı eşitlik kullanılarak Z_r-değerlerine dönüştürülerek korelasyon katsayılarına ait örnekleme dağılımının şeklinin normal dağılıma yaklaşması sağlandıktan sonra korelasyon katsayına ait örnekleme dağılımını oluşturan korelasyon katsayıları (5.20) numaralı eşitlik kullanılarak standart normal dağılıma dönüştürülür.

(9.5) numaralı eşitlikte Z yerine (5.20) numaralı eşitlikte verilen karşılığı yazılarak ve ortalamalara ait güven aralığında açıklandığı şekilde düzenlenerek korelasyon katsayısına karşılık gelecek şekilde hesaplanan Z_r değerleri için güven aralığı (9.8) numaralı eşitlikteki gibi verilebilir.

$$P(Z_r - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{Z_r} < \mu_{Z_r} < Z_r + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{Z_r}] = (1-\alpha) \qquad \dots (9.8)$$

(9.8) numaralı eşitlikte $(Z_r - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{Z_r}), \mu_{Z_r}$ 'nin alt sınırı $(Z_r + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{Z_r})$, μ_{Z_r} 'nin üst sınırı ve (1-α) olasılık, güvenilirlik derecesi veya güven katsayısıdır.

(9.8) numaralı eşitlikte düzenlendiği gibi μ_{Z_r} için alt ve üst sınır tahmin edildikten sonra populasyona ait korelasyon katsayının alt ve üst sınırları, Tablo B tersine kullanılarak veya (9.9) numaralı eşitlikten geri transformasyonla hesaplanır.

$$r = \frac{\text{antilog}(\frac{Z_r}{1.1513}) - 1}{\text{antilog}(\frac{Z_r}{1.1513}) + 1} \qquad \dots(9.9)$$

Örnekler korelasyon katsayısı bilinmeyen bir populasyondan tesadüfen alınmış ise korelasyon katsayına ait örnekleme dağılımının standart sapması (5.16) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır. Örneğin tesadüfen alındığı populasyonun korelasyon katsayısının sıfır (ρ=0) olduğu kabul edilirse (8.8) numaralı eşitlik kullanılarak t-değerine dönüştürülebilir. Bu durumda (9.8) numaralı eşitlikte $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ yerine $t_{\frac{\alpha}{2}}$ ve σ_{Z_r} yerine (5.16) numaralı eşitlik yardımıyla hesaplanan korelasyon katsayısının standart hatası, S_r, kullanılarak populasyona ait korelasyon katsayısının (1-α) olasılıkla güven aralığı (9.10) numaralı eşitlikte verildiği gibi elde edilir.

$$P[(r - t_{\frac{\alpha}{2}}S_r < \mu_r < r + t_{\frac{\alpha}{2}}S_r)] = (1-\alpha) \qquad \dots (9.10)$$

(9.10) numaralı eşitlikte $(r - t_{\frac{\alpha}{2}}S_r)$, populasyona ait korelasyon katsayısının alt sınırı ,$(r + t_{\frac{\alpha}{2}}S_r)$, populasyona ait korelasyon katsayısının üst sınırı ve (1-α) olasılığı, güvenilirlik derecesi veya güven katsayısı, $t_{\frac{\alpha}{2}}$, (n-2) serbestlik dereceli Tablo C'den bakılan çift taraflı t-dağılımı değeridir.

ÖRNEK 1:

125 bireyde yaş ile kan basıncı arasındaki korelasyon katsayısı 0.86 olarak hesaplanmıştır. Yaş ile kan basıncı arasındaki korelasyon katsayısının %95 olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığını hesaplayınız.

$\rho \neq 0$ kabul edilen populasyondan tesadüfen alınan örneklerden hesaplanan korelasyon katsayılarının Z_r-değerine dönüştürüldükten sonra normal dağılıma yaklaşacağı daha önce açıklanmıştı. 125 bireyden hesaplanan korelasyon katsayısı Tablo B kullanılarak veya (5.17) numaralı eşitlik kullanılarak aşağıdaki şekilde Z_r-değerine dönüştürülür:

$$Z_r = 1.1513 \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

$$= 1.1513 \log\left[\left(\frac{1+(0.86)}{1-(0.86)}\right)\right]$$

$$= 1.1513 \log\left(\frac{1.86}{0.14}\right)$$

$$Z_r = 1.2934$$

125 bireyden hesaplanan korelasyon katsayısı Z_r-değerine dönüştürüldüğü zaman Z_r-değerinin standart sapması (5.19) numaralı eşitlikten;

$$\sigma_{Z_r} = \frac{1}{\sqrt{(125-3)}} = \frac{1}{\sqrt{(125-3)}} = 0.091 \text{ olarak bulunur.}$$

Yaş ile kan basıncı arasındaki korelasyon katsayısı için %95 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığı hesaplanacağından $(1-\alpha)=0.95$ ve buradan $\alpha=0.05$ olup, standart normal dağılımda %2.5'luk alan ± 1.96 değerinden başlamaktadır.

Örnekten hesaplanan korelasyon katsayısına karşılık gelen Z_r-değerinin standart sapması ve Z-dağılımında %2.5'luk alanın başladığı Z-değeri belirlendikten sonra Z_r-değerinin %95 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığı (9.8) numaralı eşitlikten;

$$P(1.2934\text{-}(1.96)(0.091) < \mu_{Z_r} < (1.29340(1.96)(0.091)) = 0.95$$

$$P(1.1150 < \mu_{Z_r} < 1.4718) = 0.95$$

olarak tahmin edilir. Tahmin edilen bu güven aralığı Z_r-değeri içindir. Z_r-değeri için hesaplanan alt ve üst sınırlar (9.9) eşitlik kullanılarak aşağıdaki gibi geri transforme edilir ve korelasyon katsayısına ait alt ve üst sınırlar bulunur.

$$r_1 = \frac{\text{antilog}\left(\frac{1.1150}{1.1513}\right) - 1}{\text{antilog}\left(\frac{-0.9948}{1.1513}\right) + 1} \cong 0.81 \qquad r_2 = \frac{\text{antilog}\left(\frac{1.4718}{1.1513}\right) - 1}{\text{antilog}\left(\frac{1.4718}{1.1513}\right) + 1} \cong 0.90$$

Tahmin edilen güven aralığı yaş ile kan basıncı arasındaki korelasyon katsayısının %95 olasılıkla 0.81 ile 0.90 arasında olduğunu gösterir.

Yaş ile kan basıncı arasındaki korelasyon katsayısı için hipotez kontrolü BÖLÜM 7.2.7, ÖRNEK 1'de yapılmış ve yaş ile kan basıncı arasındaki korelasyon katsayısının bildirildiği gibi 0.80 olmadığı kararına varılmıştır. Aynı kontrol %95 olasılıkla tahmin edilen güven aralığından yararlanarak da yapılabilir. Tahmin edilen güven aralığı yaş ile kan basıncı arasındaki korelasyon katsayısının %95 olasılıkla 0.81 ile 0.90 arasında olduğunu göstermiştir, yani bu aralık 0.80 değerini içermemektedir, dolayısıyla söz konusu özellikler arasındaki korelasyon katsayısının 0.80 olduğu söylenemez. Görüldüğü gibi BÖLÜM 7.2.7, ÖRNEK 1'de verilen karar değişmemiştir.

9.5. Regresyon Katsayısına ait Güven Aralığı

Y özelliğinin X özelliğine göre regresyon katsayısı (β_{yx}) bilinmeyen bir populasyondan alınan bir örnekten hesaplanan regresyon katsayısı populasyona ait regresyon katsayısının bir tahminidir. Örnekten hesaplanan regresyon katsayısının standart hatası (5.29) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır. Örnekten hesaplanan regresyon katsayısı (8.9) numaralı eşitlik kullanılarak t-değerine dönüştürülür.

Örnekten hesaplanan regresyon katsayısına karşılık gelen t-değeri (1-α) olasılıkla $-t_{\frac{\alpha}{2}}$ ile $t_{\frac{\alpha}{2}}$ arasında olup bu değerlerden yararlanılarak (9.11) numaralı eşitlik yazılabilir:

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2}} < t < t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha \qquad \ldots(9.11)$$

(9.11) numaralı eşitlikte t yerine (8.9) numaralı eşitlik yazılarak (9.12) numaralı eşitlik elde edilir.

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{b_{yx} - \beta_{yx}}{S_b} < t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha \qquad \ldots(9.12)$$

(9.12) numaralı eşitlik yardımıyla, populasyona ait regresyon katsayısının güven aralığı (9.13) numaralı eşitlikte verildiği gibi düzenlenebilir.

$$P(b_{yx} - t_{\frac{\alpha}{2}} S_b < \beta_{yx} < b_{yx} + t_{\frac{\alpha}{2}} S_b) = 1-\alpha \qquad \ldots(9.13)$$

(9.13) numaralı eşitlikte $(b_{yx} - t_{\frac{\alpha}{2}} S_b)$, populasyona ait regresyon katsayısının alt sınırı, $(b_{yx} + t_{\frac{\alpha}{2}} S_b)$,populasyona ait regresyon katsayısının üst sınırını ve (1-α) olasılığı, güvenilirlik derecesi veya güven katsayısı olup, $t_{\frac{\alpha}{2}}$, (n-2) serbestlik dereceli Tablo C'den bakılan çift taraflı t-dağılımı değeridir.

9.10. Sorular

1. Güven aralığı ne demektir ve ne amaçla hesaplanır? Açıklayınız.

2. Hesaplanan güven aralığı nelerden ve nasıl etkilenir? Örnekler vererek açıklayınız.

3. Bir populasyonun ortalamasının %90 olasılıkla güven aralığı 45 ± 3.24 olarak hesaplanmış ise bu ne ifade eder? Açıklayınız.

4. Asit yağmurları hakkında bir fikir edinmek için 25 adet su örneğinden yararlanarak pH değerinin ortalaması $\overline{X} = 5.0$, standart sapması da S_x=0.5 olarak bulunmuştur. %95 olasılıkla pH değerinin güven aralığını hesaplayınız ve anlamını açıklayınız.

5. Vitamin drajesi üreten bir firmadan tesadüfen alınan 25 drajede B_1 vitamini miktarına ait ortalama 20. mg, varyans ise 1.2 mg olarak bulunmuştur. Bu firmada üretilen vitamin drajelerindeki B_1 vitamini miktarı ortalaması %95 olasılıkla hangi aralıktadır?

6. 36 adet sağlıklı erişkin bireyde sistolik kan basıncı ortalaması 125. mm/Hg ve standart sapması da 18. mm/Hg olarak bulunmuştur. %90 ve %95 olasılıkla, bu bireylerin alınmış olduğu populasyonda sistolik kan basıncı ortalaması hangi değerler arasındadır?

7. Bir Yerli Kara sığır populasyonundan tesadüfen seçilen 25 adet ineğin laktasyon süt verimi ortalaması 1000 kg ve standart sapması da 300 kg olarak bulunmuştur. %95 olasılıkla Yerli Kara sığır populasyonunun laktasyon süt verimi ortalamasının güven aralığını tahmin ediniz?

8. Bir tarladan tesadüfen alınan 121 adet mısır koçanının boy uzunluğu ortalaması 25. cm ve standart hatası da 2.5 cm olarak bulunmuştur. Buna göre %90 olasılıkla bu mısır koçanı populasyonunun ortalamasının içerisine düşebileceği aralığı tahmin ediniz?

9. Bir kefal balığı populasyonundan tesadüfen alınan 25 adet kefal balığı içeren bir örnekte, vücut uzunluğu ortalaması 25. cm ve standart sapması da 5. cm olarak bulunmuştur. Bu örneğin alındığı populasyonun ortalamasının güven aralığını %99 olasılıkla tahmin ediniz?

10. 81 adet sağlıklı erişkin bireyde sistolik kan basıncı ortalaması 125. mmHg ve standart sapması da 18. mmHg olarak bulunmuştur. %80 olasılıkla bu bireylerin alınmış olduğu populasyonun ortalamasının güven aralığını tahmin ediniz.

11. Yeni doğmuş bebeklerden tesadüfen alınan 25 tanesinde doğum ağırlığı ortalaması 3570 gr ve standart sapması da 300 gr olarak bulunmuştur. %95, %90 ve %99 olasılıkla yeni doğmuş bebeklerin alınmış olduğu populasyonun ortalaması hangi değerler arasındadır?

12. 25 adet sağlıklı erişkin bireyde sistolik kan basıncı ortalaması 125 mmHg ve standart sapması da 18 mmHg olarak bulunmuştur. %95 ve %90 olasılıkla, bu bireylerin alınmış olduğu populasyonda sistolik kan basıncı ortalaması hangi değerler arasındadır?

13. 90 adet bıldırcında yumurtadan çıkış ağırlığı ile 2. Hafta canlı ağırlığı arasındaki korelasyon katsayısı r=0.25 olarak bulunmuştur. Bıldırcınlarda adı geçen özellikler arasında hesaplanan korelasyon katsayısı için %99 olasılıkla güven aralığını hesaplayınız.

14. 10 bireyden elde edilen veriler kullanılarak X ve Y özellikleri arasındaki korelasyon katsayısı -0.899 ve regresyon denklemi $\hat{Y} = 8.68 - 0.109X$ olarak hesaplanmıştır. Hesaplanan korelasyon ve regresyon katsayıları için %95 ve %99 olasılıkla güven aralıklarını hesaplayınız.