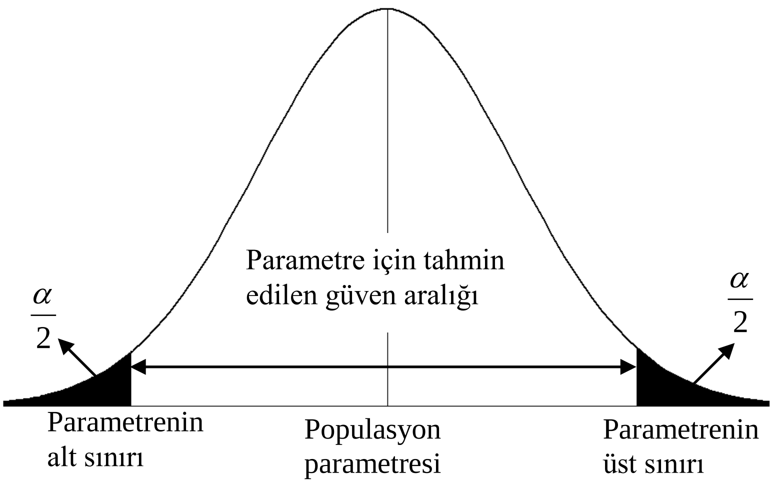
GÜVEN ARALIĞI

9.1. GİRİŞ

Yapılan çalışmaların çoğunda araştırıcı populasyon parametreleri hakkında bilgi sahibi olmayabilir. Bu durumda populasyonu temsil edecek şekilde tesadüfen alınan örnekten hesaplanan istatistik, populasyon parametresinin bir tahminidir.

,Eğer örnekten hesaplanan istatistiğe ait örnekleme dağılımının parametreleri biliniyor veya örnekten tahmin ediliyor ise belirli bir olasılık ile populasyon parametresinin içinde bulunduğu aralık tahmin edilebilir. Aralığı tahmin etmek için iki nokta hesaplanır. Üzerinde çalışılan populasyonun bilinmeyen parametresi belirli bir olasılık ile bu iki nokta arasında yer alır. Bu iki noktanın belirlediği aralığa **güven aralığı** denir. Hesaplanan iki noktadan biri güven aralığının **alt sınırı**, diğeri ise **üst sınırı**dır.

Populasyonun bilinmeyen parametresi için tahmin edilecek güven aralığı, güven aralığının sınırları ve olasılıkları, Şekil 9.1'de gösterilmiştir. Şekil 9.1'de gösterilen güven aralığı; populasyonun bilinmeyen parametresinin (1-α) olasılıkla hesaplanan alt ve üst sınırlar arasında, yani tahmin edilen güven aralığı içinde olduğunu, α olasılıkla tahmin edilen güven aralığının dışında olduğunu gösterir. (1-α) olasılığına güven katsayısı veya güvenilirlik derecesi de denir.



Şekil 9.1. Populasyon parametresine ait güven aralığı

Populasyon parametresi için tahmin edilecek güven aralığı, parametresi bilinmeyen populasyondan tesadüfen alınan örneğin genişliğine, örnekteki bireyler arasındaki değişime ve belirlenen olasılığa bağlı olarak değişir. Populasyondan tesadüfen alınan örnekler aynı örnek genişliğinde olsa bile aynı olasılıkla her bir örnek için tahmin edilecek güven aralığı örnekteki bireyler arasındaki değişime bağlı olarak farklı olabilir.

Tahmin edilen güven aralığı daraldıkça yapılan tahminin güvenilirliği artacağı gibi, üzerinde çalışılan örneğin genişliği arttıkça ve/veya örnekteki bireyler arası değişim azaldıkça da tahmin edilen güven aralığı daralır ve güvenilirliği artar.

Populasyonun bilinmeyen parametresi için tahmin edilen güven aralığı kullanılarak hipotez kontrolü de yapılabilir.

9.2. Ortalamanın Güven Aralığı

Üzerinde çalışılan örnek ortalaması bilinmeyen bir populasyonu temsil ediyorsa, populasyon ortalamasının (1-α) olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığı tahmin edilebilir.

BÖLÜM 5'te açıklandığı gibi, ortalaması μ ve standart sapması σ olan normal dağılım gösteren populasyondan belirli örnek genişliğinde (n) geriye iadeli olarak mümkün olan sayıda örneklerden hesaplanan ortalamaların dağılımına "**ortalamaya ait örnekleme dağılımı**" denir.

Bu dağılımın ortalaması populasyon ortalamasına (μ_x) eşittir. Standart sapması, eğer populasyon varyansı (veya standart sapması) biliniyor ise (5.1) numaralı, eğer bilinmiyor ise (5.2) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

Normal dağılım gösteren ortalamalara ait örnekleme dağılımını oluşturan ortalamalar (5.3) numaralı eşitlik kullanılarak standart normal dağılıma (Z-dağılımına) dönüştürülebilir.

Örnekten hesaplanan ortalamaya karşılık gelen Z-değeri (1-α) olasılıkla $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ ile $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ arasında olup;

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha \text{ şeklinde yazılabilir.} \qquad (9.1)$$

(9.1) numaralı eşitlikte Z yerine (5.3) numaralı eşitlik yazılarak (9.2) numaralı eşitlik,

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \qquad \ldots(9.2)$$

(9.2) numaralı eşitlikte, eşitsizliğin iki tarafını $\sigma_{\overline{X}}$ ile çarparak eşitlik;

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_{\overline{X}} < \overline{X}-\mu_{\overline{X}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_{\overline{X}}) = 1-\alpha$$

şeklinde düzenlenebilir. Eşitsizliğin her iki tarafından $\overline{X}$ çıkarılıp, her terim (-1) ile çarpılarak populasyon ortalamasının (1-α) olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığı (9.3) numaralı eşitlikte verildiği gibi düzenlenebilir.

$$P(\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_{\overline{x}} < \mu_x < \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_{\overline{x}}) = 1-\alpha \qquad \ldots(9.3)$$

(9.3) numaralı eşitlikte ($\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}$), populasyon ortalamasının alt sınırı ($\overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}$), populasyon ortalamasının üst sınırı ve (1-α) olasılık, güvenilirlik derecesi veya güven katsayısıdır. Populasyon ortalamasının alt sınırı (μ_{x_A}) ve üst sınırı (μ_{x_U}) ile gösterilerek güven aralığı $\mu_{x_{A,U}} = \overline{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}$ şeklinde de yazılabilir.

Üzerinde çalışılan populasyonun standart sapması da bilinmiyor ise ortalamaya ait örnekleme dağılımının standart sapması (5.2) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır. Bu durumda örnekten hesaplanan ortalama (8.1) numaralı eşitlik kullanılarak standardize edilir. Bu durumda populasyon ortalaması için güven aralığı tahmin edilirken standart normal dağılım yerine t-dağılımı kullanılır ve (9.3) numaralı eşitlik (9.4) numaralı eşitlikte verildiği şekilde düzenlenir.

$$P(\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\bar{x}} < \mu_x < \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\bar{x}}) = (1-\alpha) \qquad ...(9.4)$$

(9.4) numaralı eşitlikte $t_{\frac{\alpha}{2}}$, örneğe ait serbestlik derecesinde Tablo C'den bakılan çift taraflı t-dağılımı değeridir.

ÖRNEK 1:

Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğunun standart sapması σ = 0.3 mm olan bir normal dağılım gösterdiği bildirilmiştir. Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğu ortalamasını araştırmak için tesadüfen alınan 25 arıda dil uzunluğu ortalaması 7.05 mm olarak bulunmuştur. Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğu ortalamasının %95 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığını hesaplayınız.

Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğuna ait populasyondan tesadüfen seçilen 25 arılık çok sayıda örnekler alınsa ve ortalamalar hesaplansa, hesaplanan bu ortalamaların standart sapmasının (5.1) numaralı eşitlik kullanılarak $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{0.3}{\sqrt{25}}$ =0.06 olması beklenir.

Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğu ortalamasının %95 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığı istendiği için (1-α)=0.95'dir. Buradan α=0.05 olarak bulunur. Örnekten hesaplanan ortalamaya karşılık gelen Z değeri (9.1) numaralı eşitlikte verildiği gibi (1-α) olasılık ile -Z ile +Z arasındadır. Bu sebeple α'nın yarısı standart normal dağılımda ortalamadan küçük Z-değerlerinin bulunduğu, diğer yarısı ise ortalamadan büyük Z-değerlerinin bulunduğu tarafta alınır. Standart normal dağılımda %2.5'luk alan ±1.96 değerinden başlamaktadır.

Örnekten hesaplanan ortalamanın standart sapması ve Z-dağılımında %2.5'luk alanın başladığı Z-değeri belirlendikten sonra Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğu ortalamasının %95 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığı (9.3) numaralı eşitlikten;

$$P(7.05-(1.96)(0.06) < \mu_x < 7.05+(1.96)(0.06) = 0.95$$
$$P(6.932 < \mu_x < 7.168) = 0.95$$

olarak tahmin edilir. Bunun anlamı Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğu ortalaması %95 olasılık ile 6.932 mm ve 7.168 mm arasında olup, %5 olasılıkla da bu sınırların dışındadır.

Örnekten hesaplanan ortalamaya ait güven aralığı belirlenen olasılık ile tahmin edildikten sonra hipotez kontrolü de yapılabilir. Örneğin, 7.2.1 numaralı bölümde ÖRNEK 1'de Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğu ortalamasının 7.2 mm kabul edilip edilemeyeceği kontrol edilmiş ve söz konusu arı ırkında dil uzunluğunun 7.2 mm kabul edilemeyeceği kararına varılmıştı.

Araştırıcı güven aralığını yukarıdaki şekilde tahmin etmiş ise aynı kontrol, tahmin edilen güven aralığından yararlanılarak da yapılabilir. Tahmin edilen güven aralığı Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğu ortalamasının %95 olasılık ile 6.932 mm ve 7.168 mm arasında olduğunu göstermektedir. Bu aralık 7.2 mm değerini içermediği için söz konusu örneğin Kafkas ırkı arı populasyonuna ait olmadığı sonucuna varılabilir.

Kafkas ırkı arılarda dil uzunluğu ortalamasının 7.1 mm olup olmadığı kontrol ediliyor olsaydı, güven aralığı %95 olasılık ile bu değeri içerdiği için söz konusu örneğin Kafkas ırkı arı populasyonuna ait olduğu sonucuna varılırdı.

ÖRNEK 2:

Sarıkuyruk balığı yetiştiriciliğinde kullanılan yemi üreten bir fabrikadan tesadüfen alınan 31 adet yem örneğinde protein oranı ortalamasının %20 ve standart sapmasının da %5 olduğu tespit edilmiştir. Bu fabrikada üretilen yemlerin ortalama protein oranının %90 ve %95 olasılıklar ile hangi değerler arasında olduğunu hesaplayınız.

Fabrikada üretilen yemlerin protein oranlarına ilişkin dağılımın ortalaması ve standart sapması hakkında herhangi bir bilgi verilmemiştir. Bu fabrikada üretilen yemlerin protein oranlarına ait ortalama ve standart sapma tesadüfen alınan 31 yem örneğinden $\overline{X}$=%20 ve S_x= %5 olarak hesaplanmıştır. Üretilen yemlerin protein oranlarına ait standart sapma bilinmediği için 31 yem örneğinden hesaplanan ortalamaya ait standart sapma (5.2) numaralı eşitlikten $S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{31}}$ =0.898 olarak hesaplanır.

Populasyona ait standart sapma bilinmediği için örnekten hesaplanan ortalama (8.1) numaralı eşitlik kullanılarak standardize edilerek t-değerine dönüştürülür. Bu durumda populasyon ortalaması için güven aralığı (9.4) numaralı eşitlik kullanılarak;

$$P(\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\bar{x}} < \mu_x < \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\bar{x}}) = (1-\alpha)$$

şeklinde tahmin edilir.

Üretilen yemlerin protein oranlarının %90 olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığı hesaplanırken α değeri, (1-α)=0.90'dan, %10 olarak belirlenir. (9.4) numaralı eşitlikte t-değeri, (n-1)=(31-1)=30 serbestlik t-dağılımında %5'lik alanın başladığı t-değeridir. Tablo C'de 30 serbestlik dereceli t-dağılımında %5'lik alan 1.697 değerinden başladığından (9.4) numaralı eşitlikten üretilen yemlerin protein ortalamalarının %90 olasılık ile içinde bulunduğu aralık;

$$P(20-(1.697)(0.898) < \mu_x < 20+(1.697)(0.898) = 0.90$$

$$P(18.476 < \mu_x < 21.524) = 0.90$$

olarak tahmin edilir. Tahmin edilen güven aralığı üretilen yemlerin protein oranlarının %90 olasılıkla 18.476 ve 21.524 değerleri arasında olduğunu gösterir.

Üretilen yemlerin protein oranlarının %95 olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığı hesaplanırken de α değeri, (1-α)=0.95'den, %5 olarak belirlenir. (9.4) numaralı eşitlikte t-değeri, (n-1)=(31-1)=30 serbestlik t-dağılımında %2.5'luk alanın başladığı t-değeridir. Tablo C'de 30 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'luk alan 2.042 değerinden başladığından (9.4) numaralı eşitlikten üretilen yemlerin protein ortalamalarının %95 olasılık ile içinde bulunduğu aralık;

$$P(20-(2.042)(0.898) < \mu_x < 20+(2.042)(0.898) = 0.95$$

$$P(18.166 < \mu_x < 21.834) = 0.95$$

olarak tahmin edilir. Tahmin edilen güven aralığı üretilen yemlerin protein oranlarının %95 olasılık ile 18.166 ve 21.834 arasında olduğunu gösterir.

Daha önce açıklandığı gibi tahmin edilen güven aralığı hipotez kontrolü için de kullanılabilir.

9.3. Birbirlerinden Bağımsız Ortalamalar Arasındaki Farkın Güven Aralığı

Ortalaması bilinmeyen ve standart sapması σ olan bir normal dağılım gösteren bir populasyondan n_A ve n_B genişliğinde birbirlerinden bağımsız tesadüf örnekleri alınsa ve bu örneklerden hesaplanan ortalamalar tesadüfen yan yana getirilerek ortalamalar arasındaki farklar bulunsa bu farkın standart sapması (σ_D) (5.4) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

Normal dağılımdan elde edilen birbirlerinden bağımsız ortalamalar arası farka ait örnekleme dağılımı normal dağılım gösterdiği için hesaplanan ortalamalar arası fark (5.5) numaralı eşitlik kullanılarak standardize edilir ve standart normal dağılıma dönüştürülür.

Hesaplanan ortalamalar arası farka karşılık gelen Z-değeri (1-α) olasılıkla $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ ile $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ arasında olup;

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha \quad \text{şeklinde yazılabilir.} \qquad (9.5)$$

(9.5) numaralı eşitlikte Z yerine (5.5) numaralı eşitlik yazılarak ve ortalamalara ait güven aralığında açıklandığı şekilde düzenlenerek ortalamalar arası farka $(\overline{A}-\overline{B})$ ait güven aralığı (9.6) numaralı eşitlikteki gibi verilebilir.

$$P[(\overline{A}-\overline{B})-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_D < \mu_D < (\overline{A}-\overline{B})+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_D] = (1-\alpha) \qquad \dots (9.6)$$

(9.6) numaralı eşitlikte $(\overline{A}-\overline{B})-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_D$, ortalamalar arası farkın alt sınırı, $(\overline{A}-\overline{B})+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_D$, ortalamalar arası farkın üst sınırı ve (1-α) olasılık, güvenilirlik derecesi veya güven katsayısıdır.

Eğer örneklerin tesadüfen alındığı populasyona ait standart sapma, σ, bilinmiyor ise ortalamalar arası farkın standart sapması (5.7) numaralı eşitlik kullanılarak tahmin edilir. Bu durumda ortalamalar arasında gözlenen farkın $(\overline{A}-\overline{B})$ güven aralığı (9.6) numaralı eşitlikte Z-dağılımı yerine t-dağılımı ve σ_D yerine S_D kullanılarak (9.7) numaralı eşitlikte verildiği gibi düzenlenir.

$$P[(\overline{A}-\overline{B})-t_{\frac{\alpha}{2}}S_D < \mu_D < (\overline{A}-\overline{B})+t_{\frac{\alpha}{2}}S_D]=(1-\alpha) \qquad \dots (9.7)$$

(9.7) numaralı eşitlikte $t_{\frac{\alpha}{2}}$, [(n_A-1)+(n_B-1)] serbestlik dereceli Tablo C'den bakılan çift taraflı t-dağılımı değeridir.

ÖRNEK 1:

Bir fakültede okutulan istatistik dersi final notlarının, standart sapması 8 olan normal dağılım gösterdiği bilinmektedir. Listeden tesadüfen seçilen 16 erkek öğrencinin notlarının ortalaması 75, 25 kız öğrencinin notlarının ortalaması ise 78 olarak bulunmuştur. Kız ve erkek öğrencilerin aldıkları notlar arasındaki farkın %95 olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığını hesaplayınız.

Kız ve erkek öğrencilerin not ortalamaları arasındaki farkın %95 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığı hesaplanacağından (1-α)=0.95 ve buradan α=0.05 olup, standart normal dağılımda %2.5'lik alan ±1.96 değerinden başlamaktadır.

Bir fakültede okutulan istatistik dersi final notlarının standart sapması 8 olan normal dağılım gösterdiği ve listeden tesadüfen seçilen 16 erkek öğrencinin notlarının ortalaması 75, 25 kız öğrencinin notlarının ortalaması ise 78 olarak bulunduğuna göre, birbirlerinden bağımsız iki örnek ortalaması arasındaki farka ait standart sapma (5.4) numaralı eşitlik kullanılarak;

$$\sigma_D = \sigma\sqrt{\frac{(n_A + n_B)}{n_A n_B}} = 8\sqrt{\frac{(25+16)}{(25)(16)}} = 2.561 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnekten hesaplanan ortalamalar arası farkın standart sapması ve Z-dağılımında %2.5'luk alanın başladığı Z-değeri belirlendikten sonra kız ve erkek öğrencilerin aldıkları notlar arasındaki farkın %95 olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığı (9.6) numaralı eşitlikten;

$$P((75\text{-}78)\text{-}(1.96)(2.561) < \mu_D < (75\text{-}78)\text{-}(1.96)(2.561)) = (1\text{-}\alpha)$$
$$P(-8.02 < \mu_D < 2.02) = 0.95$$

olarak tahmin edilir. Tahmin edilen güven aralığı kız ve erkek öğrencilerin not ortalamaları arasındaki farkın %95 olasılıkla -8.02 ile 2.02 arasında olduğunu göstermiştir.

Kız ve erkek öğrencilerin aldıkları notlar arasındaki farkın %95 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığı (9.6) numaralı eşitlikten tahmin edildikten sonra "**kız ve erkek öğrencilerin not ortalamaları arasındaki farklın istatistik olarak önemli olup olmadığı**" kontrol edilebilir. Eğer kız ve erkek öğrencilerin not ortalamaları arasında gözlenen fark istatistik olarak önemli değilse not ortalamaları arasındaki farkın sıfır olması gerekir. Not ortalamaları arasındaki fark için %95 olasılık ile tahmin edilen güven aralığı -8.02 ile 2.02 arasında olup, sıfır (0) değerini içermektedir. Bu sebeple tahmin edilen güven aralığına dayanarak kız ve erkek öğrencilerin arasında söz konusu dersten alınan notlar bakımından fark olmadığı kararına varılır.

ÖRNEK 2:

Uykusuzluktan şikâyetçi 25 hastadan tesadüfen seçilen 10 tanesine A uyku ilacı, diğer 15 tanesine ise B uyku ilacı verilmiştir. Bu uygulamadan sonra söz konusu hasta gruplarının uyku süresi (saat) ortalamaları ve standart hataları sırası ile $\overline{A} \pm S_{\overline{A}}$ = 3.5 ± 0.70 ve $\overline{B} \pm S_{\overline{B}}$ = 4.5± 0.90 olarak bulunmuştur. A ve B ilaçları ile tedavi edilen grupların ortalama uyku süreleri arasındaki farkın %99 olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığını hesaplayınız.

Populasyona ait standart sapma bilinmediği için örnekten hesaplanan ortalama (8.1) numaralı eşitlik kullanılıp standardize edilerek t-değerine dönüştürülür. Bu durumda ortalamalar arası farkın güven aralığı (9.7) numaralı eşitlik kullanılarak;

$$P(((\overline{A} - \overline{B}) - t_{\frac{\alpha}{2}} S_D < \mu_D < (\overline{A} - \overline{B}) + t_{\frac{\alpha}{2}} S_D)) = (1\text{-}\alpha)$$

şeklinde tahmin edilir.

A ve B uyku ilacı alan hasta gruplarının uyku süreleri ortalamaları arasındaki farkın %99 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığı hesaplanacağından (1-α)=0.99 ve buradan α=0.01 olarak belirlenir. (9.7) numaralı eşitlikte t-değeri, (10-1)+(15-1)=23 serbestlik t-dağılımında %0.5'lik alanın başladığı Tablo C'den bulunan 2.807 değeridir.

A ve B uyku ilacı alan hasta gruplarının uyku sürelerine ait kareler toplamları ve uyku süreleri ortalamaları arasındaki farka ait standart hata (5.7) numaralı eşitlikten,

$$\sum d_A^2 = (0.7)^2.10.(10-1) = 44.1$$
$$\sum d_B^2 = (0.9)^2.15.(15-1) = 170.1$$

$$S_D = \sqrt{\frac{44.1+170.1}{(10-1)+(15-1)}\;\frac{10+15}{(10)(15)}} \cong 1.246 \text{ olarak hesaplanır.}$$

A ve B uyku ilacı alan hasta gruplarının uyku süreleri arasındaki farkın standart hatası ve t-dağılımında %0.5'lik alanın başladığı t-değeri belirlendikten sonra A ve B uyku ilacı alan hasta gruplarının uyku süreleri arasındaki farkın %99 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığı (9.7) numaralı eşitlikten;

$$P((3.5-4.5)-(2.807)(1.246) < \mu_D < (3.5-4.5)-(2.807)(1.246)) = 0.99$$
$$P(-4.498 < \mu_D < 2.498) = 0.99$$

olarak tahmin edilir. Tahmin edilen güven aralığı A ve B uyku ilacı alan hasta gruplarının uyku süreleri arasındaki farkın %99 olasılıkla -4.498 ile 2.498 arasında olduğunu göstermiştir.

A ve B uyku ilacı alan hasta gruplarının uyku süreleri arasındaki farkın %99 olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığı (9.7) numaralı eşitlikten tahmin edildikten sonra "**A ve B uyku ilacı alan hasta gruplarının uyku süreleri arasındaki farkın istatistik olarak önemli olup olmadığı**" kontrol edilebilir. Eğer A ve B uyku ilacı alan hasta gruplarının uyku süreleri arasında gözlenen fark istatistik olarak önemli değilse not ortalamaları arasındaki farkın sıfır olması gerekir. Uyku süreleri arasındaki fark için %99 olasılık ile tahmin edilen güven aralığı -4.498 ile 2.498 arasında olup sıfır (0) değerini içermektedir. Bu sebeple tahmin edilen güven aralığına dayanarak A ve B uyku ilaçları arasında ortalama uyku süreleri bakımından fark olmadığı kararına varılır.

9.4. Korelasyon Katsayısına ait Güven Aralığı

X ve Y özelliklerine ait bir örnekten hesaplanan korelasyon katsayısı populasyona ait korelasyon katsayısının, ρ'nun bir tahminidir. Eğer istenirse populasyona ait korelasyon katsayısının içinde bulunduğu güven aralığı (1-α) olasılıkla tahmin edilebilir.

Korelasyon katsayısı ρ olan bir populasyondan belirli örnek genişliğinde mümkün olan sayıda seçilen tesadüf örneklerinden hesaplanan X ve Y özellikleri arasındaki korelasyon katsayılarının gösterdiği dağılıma "**korelasyon katsayılarına ait örnekleme dağılımı**" dendiği BÖLÜM 5'te açıklanmıştı. Bu dağılımın ortalaması, μ_r, populasyondaki korelasyon katsayısına eşittir, yani $\mu_r=\rho$'dur. Dağılımının standart sapması ise (5.15) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

Örneklerin alındığı populasyona ait korelasyon katsayısı, $\rho\neq0$ olduğu zaman bu populasyondan elde edilecek korelasyon katsayısına ait örnekleme dağılımının normal dağılım göstermesi için her bir örnekten hesaplanan korelasyon katsayısının Tablo B veya (5.17) numaralı eşitlik kullanılarak Z_r-değerlerine dönüştürülmesi gerekir. Hesaplanan Z_r-değerleri ortalaması (μ_{Z_r}) (5.18) ve standart sapması (5.19) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanan normal dağılım gösterirler.

Korelasyon katsayısı, $\rho \neq 0$ olan bir populasyondan alınan örneklerden hesaplanan korelasyon katsayıları (5.17) numaralı eşitlik kullanılarak Z_r-değerlerine dönüştürülerek korelasyon katsayılarına ait örnekleme dağılımının şeklinin normal dağılıma yaklaşması sağlandıktan sonra korelasyon katsayına ait örnekleme dağılımını oluşturan korelasyon katsayıları (5.20) numaralı eşitlik kullanılarak standart normal dağılıma dönüştürülür.

(9.5) numaralı eşitlikte Z yerine (5.20) numaralı eşitlikte verilen karşılığı yazılarak ve ortalamalara ait güven aralığında açıklandığı şekilde düzenlenerek korelasyon katsayısına karşılık gelecek şekilde hesaplanan Z_r değerleri için güven aralığı (9.8) numaralı eşitlikteki gibi verilebilir.

$$P(Z_r - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{Z_r} < \mu_{Z_r} < Z_r + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{Z_r}] = (1-\alpha) \qquad \ldots (9.8)$$

(9.8) numaralı eşitlikte ($Z_r - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{Z_r}$), μ_{Z_r} 'nin alt sınırı ($Z_r + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{Z_r}$), μ_{Z_r} 'nin üst sınırı ve (1-α) olasılık, güvenilirlik derecesi veya güven katsayısıdır.

(9.8) numaralı eşitlikte düzenlendiği gibi μ_{Z_r} için alt ve üst sınır tahmin edildikten sonra populasyona ait korelasyon katsayının alt ve üst sınırları, Tablo B tersine kullanılarak veya (9.9) numaralı eşitlikten geri transformasyonla hesaplanır.

$$r = \frac{\operatorname{antilog}(\frac{Z_r}{1.1513}) - 1}{\operatorname{antilog}(\frac{Z_r}{1.1513}) + 1} \qquad \ldots (9.9)$$

Örnekler korelasyon katsayısı bilinmeyen bir populasyondan tesadüfen alınmış ise korelasyon katsayına ait örnekleme dağılımının standart sapması (5.16) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır. Örneğin tesadüfen alındığı populasyonun korelasyon katsayısının sıfır (ρ=0) olduğu kabul edilirse (8.8) numaralı eşitlik kullanılarak t-değerine dönüştürülebilir. Bu durumda (9.8) numaralı eşitlikte $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ yerine $t_{\frac{\alpha}{2}}$ ve σ_{Z_r} yerine (5.16) numaralı eşitlik yardımıyla hesaplanan korelasyon katsayısının standart hatası, S_r, kullanılarak populasyona ait korelasyon katsayısının (1-α) olasılıkla güven aralığı (9.10) numaralı eşitlikte verildiği gibi elde edilir.

$$P[(r - t_{\frac{\alpha}{2}} S_r < \mu_r < r + t_{\frac{\alpha}{2}} S_r)] = (1-\alpha) \qquad \ldots (9.10)$$

(9.10) numaralı eşitlikte ($r - t_{\frac{\alpha}{2}} S_r$), populasyona ait korelasyon katsayısının alt sınırı ,($r + t_{\frac{\alpha}{2}} S_r$), populasyona ait korelasyon katsayısının üst sınırı ve (1-α) olasılığı, güvenilirlik derecesi veya güven katsayısı, $t_{\frac{\alpha}{2}}$, (n-2) serbestlik dereceli Tablo C'den bakılan çift taraflı t-dağılımı değeridir.

ÖRNEK 1:

125 bireyde yaş ile kan basıncı arasındaki korelasyon katsayısı 0.86 olarak hesaplanmıştır. Yaş ile kan basıncı arasındaki korelasyon katsayısının %95 olasılıkla içinde bulunduğu güven aralığını hesaplayınız.

$\rho \neq 0$ kabul edilen populasyondan tesadüfen alınan örneklerden hesaplanan korelasyon katsayılarının Z_r-değerine dönüştürüldükten sonra normal dağılıma yaklaşacağı daha önce açıklanmıştı. 125 bireyden hesaplanan korelasyon katsayısı Tablo B kullanılarak veya (5.17) numaralı eşitlik kullanılarak aşağıdaki şekilde Z_r-değerine dönüştürülür:

$$Z_r = 1.1513 \log(\frac{1+r}{1-r})$$
$$= 1.1513 \log[(\frac{1+(0.86)}{1-(0.86)})]$$
$$= 1.1513 \log(\frac{1.86}{0.14})$$
$$Z_r = 1.2934$$

125 bireyden hesaplanan korelasyon katsayısı Z_r-değerine dönüştürüldüğü zaman Z_r-değerinin standart sapması (5.19) numaralı eşitlikten;

$$\sigma_{Z_r} = \frac{1}{\sqrt{(125-3)}} = \frac{1}{\sqrt{(125-3)}} = 0.091 \text{ olarak bulunur.}$$

Yaş ile kan basıncı arasındaki korelasyon katsayısı için %95 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığı hesaplanacağından $(1-\alpha)=0.95$ ve buradan $\alpha=0.05$ olup, standart normal dağılımda %2.5'luk alan ± 1.96 değerinden başlamaktadır.

Örnekten hesaplanan korelasyon katsayısına karşılık gelen Z_r-değerinin standart sapması ve Z-dağılımında %2.5'luk alanın başladığı Z-değeri belirlendikten sonra Z_r-değerinin %95 olasılık ile içinde bulunduğu güven aralığı (9.8) numaralı eşitlikten;

$$P(1.2934-(1.96)(0.091) < \mu_{Z_r} < (1.29340(1.96)(0.091)) = 0.95$$
$$P(1.1150 < \mu_{Z_r} < 1.4718) = 0.95$$

olarak tahmin edilir. Tahmin edilen bu güven aralığı Z_r-değeri içindir. Z_r-değeri için hesaplanan alt ve üst sınırlar (9.9) eşitlik kullanılarak aşağıdaki gibi geri transforme edilir ve korelasyon katsayısına ait alt ve üst sınırlar bulunur.

$$r_1 = \frac{\operatorname{antilog}(\frac{1.1150}{1.1513}) - 1}{\operatorname{antilog}(\frac{-0.9948}{1.1513}) + 1} \cong 0.81 \qquad r_2 = \frac{\operatorname{antilog}(\frac{1.4718}{1.1513}) - 1}{\operatorname{antilog}(\frac{1.4718}{1.1513}) + 1} \cong 0.90$$

Tahmin edilen güven aralığı yaş ile kan basıncı arasındaki korelasyon katsayısının %95 olasılıkla 0.81 ile 0.90 arasında olduğunu gösterir.

Yaş ile kan basıncı arasındaki korelasyon katsayısı için hipotez kontrolü BÖLÜM 7.2.7, ÖRNEK 1'de yapılmış ve yaş ile kan basıncı arasındaki korelasyon katsayısının bildirildiği gibi 0.80 olmadığı kararına varılmıştır. Aynı kontrol %95 olasılıkla tahmin edilen güven aralığından yararlanarak da yapılabilir. Tahmin edilen güven aralığı yaş ile kan basıncı arasındaki korelasyon katsayısının %95 olasılıkla 0.81 ile 0.90 arasında olduğunu göstermiştir, yani bu aralık 0.80 değerini içermemektedir, dolayısıyla söz konusu özellikler arasındaki korelasyon katsayısının 0.80 olduğu söylenemez. Görüldüğü gibi BÖLÜM 7.2.7, ÖRNEK 1'de verilen karar değişmemiştir.

9.5. Regresyon Katsayısına ait Güven Aralığı

Y özelliğinin X özelliğine göre regresyon katsayısı (β_{yx}) bilinmeyen bir populasyondan alınan bir örnekten hesaplanan regresyon katsayısı populasyona ait regresyon katsayısının bir tahminidir. Örnekten hesaplanan regresyon katsayısının standart hatası (5.29) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır. Örnekten hesaplanan regresyon katsayısı (8.9) numaralı eşitlik kullanılarak t-değerine dönüştürülür.

Örnekten hesaplanan regresyon katsayısına karşılık gelen t-değeri (1-α) olasılıkla $-t_{\frac{\alpha}{2}}$ ile $t_{\frac{\alpha}{2}}$ arasında olup bu değerlerden yararlanılarak (9.11) numaralı eşitlik yazılabilir:

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2}} < t < t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha \qquad \ldots(9.11)$$

(9.11) numaralı eşitlikte t yerine (8.9) numaralı eşitlik yazılarak (9.12) numaralı eşitlik elde edilir.

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{b_{yx} - \beta_{yx}}{S_b} < t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha \qquad \ldots(9.12)$$

(9.12) numaralı eşitlik yardımıyla, populasyona ait regresyon katsayısının güven aralığı (9.13) numaralı eşitlikte verildiği gibi düzenlenebilir.

$$P(b_{yx} - t_{\frac{\alpha}{2}} S_b < \beta_{yx} < b_{yx} + t_{\frac{\alpha}{2}} S_b) = 1-\alpha \qquad \ldots(9.13)$$

(9.13) numaralı eşitlikte $(b_{yx} - t_{\frac{\alpha}{2}} S_b)$, populasyona ait regresyon katsayısının alt sınırı, $(b_{yx} + t_{\frac{\alpha}{2}} S_b)$,populasyona ait regresyon katsayısının üst sınırını ve (1-α) olasılığı, güvenilirlik derecesi veya güven katsayısı olup, $t_{\frac{\alpha}{2}}$, (n-2) serbestlik dereceli Tablo C'den bakılan çift taraflı t-dağılımı değeridir.

9.10. Sorular

1. Güven aralığı ne demektir ve ne amaçla hesaplanır? Açıklayınız.

2. Hesaplanan güven aralığı nelerden ve nasıl etkilenir? Örnekler vererek açıklayınız.

3. Bir populasyonun ortalamasının %90 olasılıkla güven aralığı 45 ± 3.24 olarak hesaplanmış ise bu ne ifade eder? Açıklayınız.

4. Asit yağmurları hakkında bir fikir edinmek için 25 adet su örneğinden yararlanarak pH değerinin ortalaması $\overline{X} = 5.0$, standart sapması da S_x=0.5 olarak bulunmuştur. %95 olasılıkla pH değerinin güven aralığını hesaplayınız ve anlamını açıklayınız.

5. Vitamin drajesi üreten bir firmadan tesadüfen alınan 25 drajede B_1 vitamini miktarına ait ortalama 20. mg, varyans ise 1.2 mg olarak bulunmuştur. Bu firmada üretilen vitamin drajelerindeki B_1 vitamini miktarı ortalaması %95 olasılıkla hangi aralıktadır?

6. 36 adet sağlıklı erişkin bireyde sistolik kan basıncı ortalaması 125. mm/Hg ve standart sapması da 18. mm/Hg olarak bulunmuştur. %90 ve %95 olasılıkla, bu bireylerin alınmış olduğu populasyonda sistolik kan basıncı ortalaması hangi değerler arasındadır?

7. Bir Yerli Kara sığır populasyonundan tesadüfen seçilen 25 adet ineğin laktasyon süt verimi ortalaması 1000 kg ve standart sapması da 300 kg olarak bulunmuştur. %95 olasılıkla Yerli Kara sığır populasyonunun laktasyon süt verimi ortalamasının güven aralığını tahmin ediniz?

8. Bir tarladan tesadüfen alınan 121 adet mısır koçanının boy uzunluğu ortalaması 25. cm ve standart hatası da 2.5 cm olarak bulunmuştur. Buna göre %90 olasılıkla bu mısır koçanı populasyonunun ortalamasının içerisine düşebileceği aralığı tahmin ediniz?

9. Bir kefal balığı populasyonundan tesadüfen alınan 25 adet kefal balığı içeren bir örnekte, vücut uzunluğu ortalaması 25. cm ve standart sapması da 5. cm olarak bulunmuştur. Bu örneğin alındığı populasyonun ortalamasının güven aralığını %99 olasılıkla tahmin ediniz?

10. 81 adet sağlıklı erişkin bireyde sistolik kan basıncı ortalaması 125. mmHg ve standart sapması da 18. mmHg olarak bulunmuştur. %80 olasılıkla bu bireylerin alınmış olduğu populasyonun ortalamasının güven aralığını tahmin ediniz.

11. Yeni doğmuş bebeklerden tesadüfen alınan 25 tanesinde doğum ağırlığı ortalaması 3570 gr ve standart sapması da 300 gr olarak bulunmuştur. %95, %90 ve %99 olasılıkla yeni doğmuş bebeklerin alınmış olduğu populasyonun ortalaması hangi değerler arasındadır?

12. 25 adet sağlıklı erişkin bireyde sistolik kan basıncı ortalaması 125 mmHg ve standart sapması da 18 mmHg olarak bulunmuştur. %95 ve %90 olasılıkla, bu bireylerin alınmış olduğu populasyonda sistolik kan basıncı ortalaması hangi değerler arasındadır?

13. 90 adet bıldırcında yumurtadan çıkış ağırlığı ile 2. Hafta canlı ağırlığı arasındaki korelasyon katsayısı r=0.25 olarak bulunmuştur. Bıldırcınlarda adı geçen özellikler arasında hesaplanan korelasyon katsayısı için %99 olasılıkla güven aralığını hesaplayınız.

14. 10 bireyden elde edilen veriler kullanılarak X ve Y özellikleri arasındaki korelasyon katsayısı -0.899 ve regresyon denklemi $\hat{Y} = 8.68 - 0.109X$ olarak hesaplanmıştır. Hesaplanan korelasyon ve regresyon katsayıları için %95 ve %99 olasılıkla güven aralıklarını hesaplayınız.

Kİ-KARE (χ^2) DAĞILIMI ve Kİ-KARE TESTLERİ
(HOMOJENLİK, UYUM, BAĞIMSIZLIK KONTROLLERİ)

10.1. Giriş

Yürütülen bir çalışmadan elde edilen veriler sayısal veriler olabileceği gibi nominal veya ordinal veriler olabilir. BÖLÜM 1'de açıklandığı gibi nominal "isim ile belirtilmiş" anlamında kullanılmaktadır. İsimlendirilmiş (nominal) veriler (erkek / kadın), (sarı / beyaz), (var / yok) vb şekilde elde edilmiş verilerdir. Bu tip veriler sadece isimle belirtilmiştir ve analiz aşamasında isim verilerek yeni kategoriler (sınıflar) oluşturabilir. Ordinal veriler ise sıralı veya sıralandırılmış verilerdir. Eğer üzerinde durulan değişkene ait değerler sıralanabilir kategorilerden oluşuyorsa bu tip veriler sıralı veya sıralandırılmış verilerdir. Örneğin bir sınav sonucunda öğrenciler A, B, C gibi notlar alabilir. Bu notlar öğrencilerin sınavdaki yeterliliklerine göre verilir ve A alan öğrenci B alan öğrenciden daha çalışkan olduğu verilen nottan anlaşılır. Diğer bir örnek olarak at yarışlarını verebiliriz. Gerek nominal gerekse ordinal verilerin elde edilmesinde bunların sayıları (frekansları) üzerinde durulur. Yani bu tür veriler sayılarak elde edilirler. Erkek sayısı, kadın sayısı, A notunu alanların sayısı, B notunu alanların sayısı,…vb. Ölçmek suretiyle elde edilen veriler de sonradan belirli bir kritere kategorik hale dönüştürülebilir. İnsanlarda tansiyon bilindiği üzere mmHg olarak ölçülmekte, ancak ifade edilirken düşük, normal, yüksek şeklinde kategorik hale dönüştürülmektedir. Bunun gibi fen, sosyal bilimlerde daha bir çok örnek bulmak mümkündür.

Kategorik değişkenlerden elde edilen veriler araştırıcı tarafından belirlenen kategoriler (sınıflar) içinde yer alır. İsimlendirilmiş veya sıralandırılmış veriler için araştırıcı kategoriler oluşturmuş ise bu şekilde elde edilen kategorik verilerin analizi ki-kare testleri kullanılarak yapılır. Ki-kare testleri, kategorik değişkenlerin dağılımlarının birbirinden farklı olup olmadığını kontrol etmek için kullanılır.

Ki-kare testleri, gözlenen frekansların teorik olarak beklenen frekanslardan farklı olup olmadığını kontrol etmek için kullanılır. Ki-kare testleri, sayarak elde edilmiş frekansların çeşitli kategorik sınıflara dağılımlarını incelemek amacıyla kullanılmaktadır. Dolayısıyla örneğin veya populasyonun ortalama ve varyansı ile ilgilenmez. Ki-kare testleri iki gruba ayrılır:

1. Uyum kontrolleri: Araştırıcının gözlediği frekanslar ile teorik olarak beklenen frekansları karşılaştırarak gözlenen frekansların beklenen frekanslar ile uyum içinde olup olmadığını kontrol eder. Bu kontroller homojenlik, belirtilen oranlara uyum veya belirli istatistik dağılımlara uyum kontrolleridir.
2. Bağımsızlık kontrolleri: Sayılarak elde edilen verilerin iki veya daha fazla sayıdaki kategorik faktöre göre olan dağılımlarının, söz konusu kategorik faktörlerden bağımsız olup olmadığının ele alındığı çalışmalardır.

Ki-kare testlerinde kontrol veya karşıt hipotezlerinden hangisinin kabul edileceğine karar verme aşamasında test dağılımı olarak ki-kare dağılımı kullanılır.

10.2. Ki-Kare (χ^2) Dağılımı

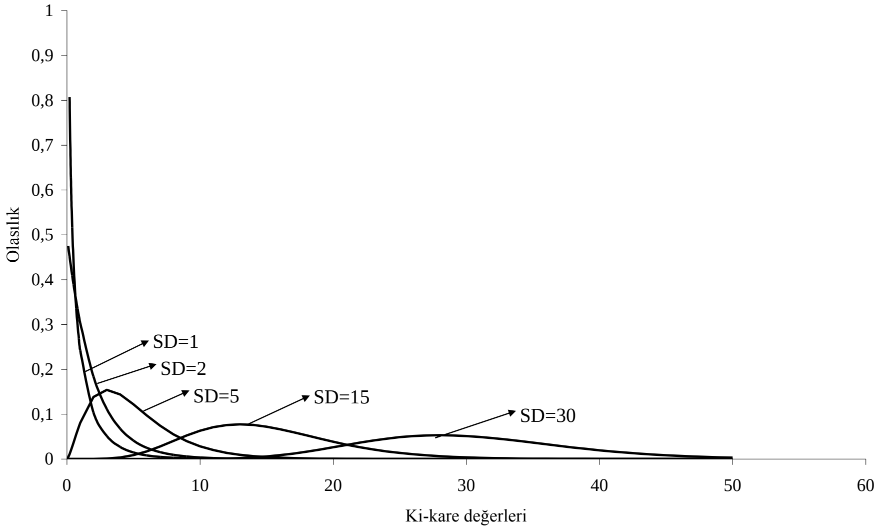
Standart normal dağılımdan tesadüfen ν adet Z-değeri alınarak (10.1) numaralı eşitlikte görüldüğü gibi bunların teker teker kareleri alınıp toplansa bir tane χ^2 değeri elde edilir. Bu işlem mümkün olan sayıda tekrarlanırsa v serbestlik dereceli ki-kare (χ^2_v) dağılımı elde edilir.

$$\chi^2_v = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + ... + Z_v^2 = \sum_{i=1}^{v} Z_i^2 \qquad ...(10.1)$$

(10.1) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanan ki-kare değerleri (10.2) numaralı eşitlikte verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna uygun dağılım gösterir.

$$f(\chi^2_v) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}(\frac{v}{2})!}(\chi^2)^{\frac{(v-2)}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \qquad ...(10.2)$$

(10.2) numaralı eşitlikte, v, serbestlik derecesidir (SD). (10.2) numaralı eşitlikte verilen olasılık yoğunluk fonksiyonundan anlaşıldığı gibi ki-kare dağılımı serbestlik deresine bağlı bir dağılımdır. Yani ki-kare dağılımının bir parametresi vardır ve bu da serbestlik derecesidir. Diğer bir deyişle sonsuz sayıdaki ki-kare dağılımları birbirlerinden serbestlik dereceleri ile ayrılırlar. Ki-kare dağılımının şekli parametresine (serbestlik derecesine) göre değişmektedir (Şekil 10.1)



ŞEKİL 10.1. Farklı serbestlik dereceli ki-kare dağılımları. Grafikte, SD: serbestlik derecesidir.

İsimlendirilmiş ve sıralandırılmış şekilde elde edilen veriler için kategoriler oluşturulduğu zaman araştırıcının her kategori için gözlediği frekansların yanı sıra belirli oranlara ve özelliklere göre beklediği frekanslar vardır. Her bir kategori için gözlenen ve beklenen frekanslardan (10.3) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanacak değerler de belirli varsayımlar altında ki-kare dağılımı gösterirler.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{[\text{Gözlenen frekans(f)} - \text{Beklenen frekans(f}^{'})]^2}{\text{Beklenen frekans(f}^{'})} \quad \ldots(10.3)$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f - f^{'})^2}{f^{'}}$$

(10.3) numaralı eşitlikte, k: kategori (sınıf) sayısı, f: her bir sınıf için gözlenen frekans, $f^{'}$: belirli oranlara ve özelliklere göre her bir sınıf için beklenen frekanslardır. (10.3) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanan ki-kare değerinin serbestlik derecesi yapılan kontrol sırasında parametre yerine kullanılan istatistik sayısına bağlı olarak (k-1), (k-2), (k-3)...vs. olabilir. (10.3) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanacak ki-kare değerinin ki-kare dağılımı gösterebilmesi için her sınıf için hesaplanacak beklenen frekansın 5'ten küçük olmaması gerekir.

Ki-kare testleri uygulanırken serbestlik derecesinin 1 olması durumunda hesaplanan ki-kare değerinin ki-kare dağılımına daha iyi yaklaşması için (10.4) numaralı eşitlikte verildiği gibi YATES düzeltmesinin yapılması gerekir.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{[\left|f - f^{'}\right| - 0.5]^2}{f^{'}} \quad \ldots(10.4)$$

Ki-kare dağılımı, serbestlik derecesine bağlı tek taraflı ve sürekli bir dağılımdır. Dağılımın şekli serbestlik derecesine bağlı olarak değişir. Şekil 10.1'de görüldüğü gibi 1 serbestlik dereceli ki-kare dağılımı X ve Y eksenlerine +∞'da asimptot oluşturur. 2 serbestlik dereceli ki-kare dağılımı Y-eksenini keser ve X-eksenine +∞'da asimtot oluşturur. 3 ve daha fazla serbestlik dereceli ki-kare dağılımları 0'dan başlar ve (SD-2) noktasına kadar artarak maksimum (tepe değeri) oluşturur. Bu noktadan itibaren azalarak X-eksenine +∞'da asimtot oluşturur. Bütün Ki-kare dağılımlarının ortalaması serbestlik derecesine (SD), varyansı ise serbestlik derecesinin iki katına (2 SD) eşittir. Şekil 10.1'den görüldüğü gibi serbestlik derecesi arttıkça ki-kare dağılımı simetrikleşir ve normal dağılıma yaklaşır.

Ki-kare dağılımı serbestlik derecesine bağlı bir dağılım olduğu için sonsuz tane ki-kare dağılımı vardır. Farklı serbestlik dereceli ki-kare dağılımlarında farklı yüzdelik alanların başladığı ki-kare değerleri Tablo D'de verilmiştir.

10.3. Homojenlik Kontrolü

Homojenlik kontrolü, oluşturulan kategorilere (sınıflara) göre araştırmada dikkate alınan bireylerin dağılımının homojen olup olmadığını, yani oluşturulan sınıflar arasında, her bir sınıfta bulunan birey sayısı bakımından farklılığın önemli olup olmadığını kontrol eder.

ÖRNEK 1:

A, B, C, D ve E gibi 5 çeşit yem bitkisi tohumu eşit oranda belirlenen bir alana ekilmiştir. 2 yıl sonra bu alandan toplanan 200 bitkinin tohum çeşitlerine göre dağılımı Tablo 10.1'de verildiği gibi gözlenmiştir. Toplanan bitkilerin dağılımının homojen olduğu, yani çeşitlerin dağılımının tohumda olduğu gibi homojen kaldığı söylenebilir mi?

Tablo 10.1. Toplanan bitkilerin çeşitlere göre dağılımı

Bitki çeşidi	Gözlenen frekans (f)	Beklenen frekans (f')	$\frac{(f-f')^2}{f'}$
A	40	40	0.000
B	35	40	0.625
C	25	40	5.625
D	55	40	5.625
E	45	40	0.625
Toplam	200	200	χ^2= 12.500

Yapılan çalışmanın amacı, eşit oranda ekilen bitki tohumlarının eşit oranda kalıp kalmadığının, yani çıkan bitkilerin çeşitlere göre dağılımının homojen olup olmadığının araştırılmasıdır. Bunun için χ^2-homojenlik kontrolünün uygulanması gerekir.

Daha önce yapılan hipotez kontrollerinde açıklandığı gibi ilk olarak kontrol ve karşıt hipotezlerin aşağıdaki şekilde kurulması gerekir.

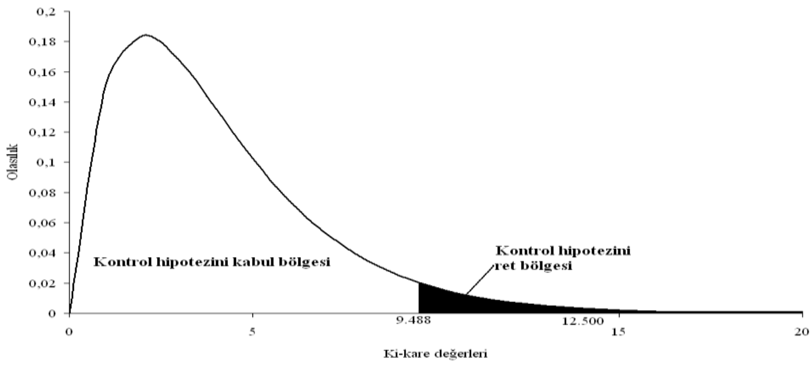
H_0: Toplanan bitkilerin çeşitlere göre dağılımı homojendir. Tohum çeşitleri arasında toplanan bitki sayısı bakımından fark tesadüften ileri gelmiştir. Kısaca, $(f-f')=0$, yani bir tohum çeşidi için toplanan bitki sayısı ile toplanması beklenen bitki sayısı arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir ve sıfır kabul edilebilir.

H_1: Toplanan bitkilerin çeşitlere göre dağılımı homojen değildir Tohum çeşitleri arasında toplanan bitki sayısı bakımından fark tesadüften ileri gelmemiştir. Kısaca, $(f-f')\neq 0$, yani bir tohum çeşidi için toplanan bitki sayısı ile toplanması beklenen bitki sayısı arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir ve sıfır kabul edilemez.

χ^2-homojenlik kontrolünde χ^2-istatistiği (10.3) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır. Bunun için ilk olarak her bitki çeşidinden kaç bitkinin toplanması beklendiğinin hesaplanması gerekir. Çalışmada farklı çeşitlerden tohumların eşit oranda ekildiği ve kontrol hipotezinde de toplanan bitkilerin çeşitlere göre dağılımı homojen olduğu ileri sürüldüğüne göre toplanan bitkilerin eşit olarak bitki çeşitlerine dağılması gerekir, yani her bitki çeşidinden 200/5=40 bitkinin toplanması beklenir. Bu her bir çeşit için beklenen frekanstır. χ^2-kontrolleri yapılırken gözlenen ve beklenen frekansların toplamı her zaman birbirine eşittir. Her bir çeşit için beklenen frekanslar hesaplandıktan sonra χ^2-değeri (10.3) numaralı eşitlik kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanır ve:

$$\chi^2 = \frac{(40-40)^2+(35-40)^2+(25-40)^2+(55-40)^2+(45-40)^2}{40} = 12.5$$

χ^2-değeri 12.5 olarak bulunur. Bu kontrolde sınıf sayısı 5 olduğundan serbestlik derecesi (k-1)= 4‘tür**.** Eğer yapılan kontrolde I. tip hata olasılığı %5 olarak kararlaştırmışsa kritik χ^2-değeri Tablo D’den 9.488 olarak bulunur. Şekil 10.2’de görüldüğü gibi Tablo D’den bulunan değer ki-kare dağılımını kontrol hipotezini kabul ve ret olmak üzere iki bölgeye ayırır.



ŞEKİL 10.2. 4 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında H_0 hipotezini ret ve kabul bölgeleri

Şekil 10.2'de görüldüğü gibi hesaplanan ki-kare değerinin, 4 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına dahil olma olasılığı %5'den küçüktür. Yani kontrol hipotezinin ret bölgesinde yer almaktadır. Bu sebeple kontrol hipotezi rey edilir. Yapılan homojenlik kontrolü sonucunda toplanan bitkilerin çeşitlere göre dağılımının homojen olmadığı, diğer bir deyişle tohum çeşitleri arasında toplanan bitki sayısı bakımından fark tesadüften ileri gelmediği kararına varılır.

ÖRNEK 2:

Bir bulvardan bir hafta boyunca geçen araçların günlere göre dağılımı Tablo 10.2'de verildiği gibi gözlenmiştir. Söz konusu bulvardan geçen araçların haftanın günlerine göre olan dağılımlarının homojen olduğu söylenebilir mi?

Tablo 10.2. Bir bulvardan geçen araçların haftanın günlerine göre dağılımı

Haftanın günleri	Gözlenen araç sayısı (f)	Beklenen araç sayısı (f')	$\frac{(f-f')^2}{f'}$
Pazartesi	425	369	8.499
Salı	355	369	0.531
Çarşamba	270	369	26.561
Perşembe	455	369	20.043
Cuma	550	369	88.783
Cumartesi	278	369	22.442
Pazar	250	369	38.377
Toplam	2583	2583	χ^2= 205.236

Yapılan çalışmada söz konusu bulvardan hafta boyunca geçen araçların haftanın günlerine göre dağılımının homojen olup olmadığı araştırılmaktadır. χ^2-homojenlik testi uygulanarak kontrol edilecek hipotezler aşağıdaki şekilde kurulur.

H_0: Söz konusu bulvardan hafta boyunca geçen araçların günlere göre dağılımı homojendir. Günler arasında bulvardan geçen araç sayısı bakımından gözlenen fark tesadüften ileri gelmektedir. Kısaca, (f-f')=0 dır. Yani bulvardan bir günde geçen araç sayısı ile geçmesi beklenen araç sayısı arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir ve sıfır kabul edilebilir.

H_1: Söz konusu bulvardan hafta boyunca geçen araçların günlere göre dağılımı homojen değildir. Günler arasında bulvardan geçen araç sayısı bakımından gözlenen fark tesadüften ileri gelmemektedir. Kısaca, $(f - f^{'}) \neq 0$ dır. Yani bulvardan bir günde geçen araç sayısı ile geçmesi beklenen araç sayısı arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir ve sıfır kabul edilemez.

Eğer kontrol hipotezi doğru ise bir hafta boyunca bulvardan geçen araçların günlere eşit olarak dağılması gerekir. Bu sebeple bulvardan haftanın her günü geçmesi beklenen araç sayısı 2583/7=369'dur. Her bir gün için beklenen araç sayısı hesaplandıktan sonra χ^2-değeri (10.3) numaralı eşitlik kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\chi^2 = \frac{(425-369)^2 + (355-369)^2 + \ldots + (250-369)}{369} = 205.236$$

Haftanın 7 günü olduğu için serbestlik derecesi (7-1)= 6'dır**.** Eğer yapılan kontrolde I. tip hata olasılığı %1 olarak kararlaştırmışsa Tablo D'den, 6 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında %1'lik alanın 16.812'den başladığı bulunur. Hesaplanan ki-kare değerinin 7 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına dahil olma olasılığı %1'den küçüktür. Bu sebeple kontrol hipotezi ret edilir. Yapılan homojenlik kontrolü sonucunda bulvardan geçen araçların haftanın günlerine göre olan dağılımlarının homojen olmadığı, yani haftanın günleri arasında bulvardan geçen araç sayısı bakımından farkın istatistik olarak önemli olduğu kararına varılır.

10.4. Uyum Kontrolleri

Yapılan bir araştırmada üzerinde durulan kategorilerde (sınıflarda) gözlenen frekansların her sınıf için bildirilen oranlarla uyum içinde olup olmadığı kontrol edilebileceği gibi toplanan verilerin belirli bir istatistik dağılıma uygun dağılıp dağılmadıkları da kontrol edilebilir.

10.4.1. Belirtilen Oranlara Uyum Kontrolü

ÖRNEK 1:

Bir ormandaki ağaçların %15'inin meşe, %20'sinin Ladin, %15'inin çam, %20'sinin köknar, %20'sinin ıhlamur ve %10'unun da kestane ağacı olduğu bildirilmiştir. Söz konusu ormandan tesadüfen seçilen 350 ağacın çeşitlere göre dağılımı Tablo 10.3'deki gibi gözlenmiştir. Bu ormandaki ağaçlar için bildirilen oranlar doğru mudur?

Bu çalışmanın amacı söz konusu ormanda bulunan ağaç çeşitleri için bildirilen oranların doğru olup olmadığını kontrol etmektir. Eğer ormandaki ağaç çeşitleri için bildirilen oranlar doğru ise her çeşit için gözlenen sayı ile beklenen sayılar arasındaki fark tesadüften ileri gelmelidir. Tesadüfen 350 seçildiğine göre 350 ağaçtan her çeşidin beklenen frekansı, her çeşit için bildirilen oranla seçilen ağaç sayısı çarpılarak bulunmuş ve Tablo 10.3'te verilmiştir.

Tablo 10.3. 350 ağacın çeşitlere göre dağılımı ve her çeşit için beklenen sayılar

Ağaç çeşitleri	Gözlenen ağaç sayısı (f)	Oran	Beklenen ağaç sayısı (f')	$\frac{(f - f')^2}{f'}$
Meşe	48	%15	350(0.15)=52.5	0.386
Ladin	65	%20	350(0.20)=70.0	0.357
Çam	56	%15	350(0.15)=52.5	0.233
Köknar	76	%20	350(0.20)=70.0	0.514
Ihlamur	64	%20	350(0.20)=70.0	0.514
Kestane	41	%10	350(0.10)=35.0	1.029
Toplam	350	%100	350	χ^2= 3.033

Her çeşit için beklenen frekanslar hesaplandıktan sonra χ^2-değeri (10.3) numaralı eşitlik kullanılarak aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\chi^2 = \frac{(48-52.5)^2}{52.2} + \frac{(65-70)^2}{70} + \ldots + \frac{(64-70)^2}{70} + \frac{(41-35)^2}{35} = 3.033$$

Belirtilen ağaç çeşidi 6 olduğundan serbestlik derecesi 5'tir**.** Eğer yapılan kontrolde I. tip hata olasılığı %1 olarak kararlaştırmışsa Tablo D'den 5 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında %1'lik alanın 15.086 değerinden başladığı görülür. Hesaplanan ki-kare değerinin 6 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına dahil olma olasılığı %1'den büyüktür. Dolayısıyla kontrol hipotezi kabul edilir. Yapılan uyum kontrolü sonucunda ormandaki ağaç çeşitleri için belirtilen oranların doğru olduğu, yani tesadüfen seçilen ağaların, ağaç çeşitlerine göre dağılımının belirtilen oranlar ile uyum içinde olduğuna karar verilir.

ÖRNEK 2:

Bir zar 120 kere atılmış ve her yüzün kaç kez geldiği Tablo 10.4'teki gibi gözlenmiştir.

Tablo 10.4. 120 zar atışının zarın yüzlerine göre dağılımı ve her yüz için beklenen atış sayısı

Zarın yüzleri	Gözlenen Zar yüzü sayısı (f)	Oran	Beklenen zar yüzü sayısı (f')	$\frac{(f - f')^2}{f'}$
1	15	1/6	120(1/6)=20	1.25
2	12	1/6	120(1/6)=20	3.20
3	22	1/6	120(1/6)=20	0.20
4	19	1/6	120(1/6)=20	0.05
5	24	1/6	120(1/6)=20	0.80
6	28	1/6	120(1/6)=20	3.20
Toplam	120	1.00	120	χ^2= 8.70

Bir zar hilesiz olarak atıldığı zaman her bir yüzün gelme olasılığı 1/6'dır. Zar 120 kere atılarak her yüzün gelme sayısı tablo 10.4'te verilmiştir. Eğer zar hilesiz olarak atılmış ise 120 atışın, zarın yüzlerine 1/6 oranında dağılmış olması, yani Tablo 10.4'te görüldüğü gibi her bir yüzün 120(1/6)=20 kere gelmiş olması beklenir. Zar, hilesiz olarak atıldığı zaman her bir yüz 20 kere gelmemiş olsa bile beklenen atış sayısı ile gözlenen atış sayıları arasındaki farklılığın tesadüften ileri geliyor olması gerekir. Gözlenen ve beklenen atış sayıları arasındaki farklılığın tesadüfi olup olmadığını kontrol etmek için gözlenen atış sayısının beklenen atış sayısı ile uyum için olup olmadığı (10.3) numaralı eşitlikten ki-kare değeri hesaplanarak aşağıdaki şekilde yapılır.

$$\chi^2 = \frac{(15-20)^2 + (12-20)^2 + \ldots + (24-20)^2 + (28-20)^2}{20} = 8.70$$

Bir zarın 6 yüzü olduğu için serbestlik derecesi 5'tir**.** Yapılan kontrolde I. tip hata olasılığı %5 olarak kararlaştırmışsa Tablo D'den 5 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında %5'lik alanın 11.070 değerinden başladığı görülür. Hesaplanan ki-kare değerinin (χ^2= 8.70) 5 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına dahil olma olasılığı %5'den büyüktür. Dolayısıyla kontrol hipotezi kabul edilir. Yapılan uyum kontrolü sonucunda zarın hilesiz olarak atıldığı, yani 120 atışın zarın yüzlerine göre dağılımının belirtilen oranlara ile uyum içinde olduğu kararına varılır.

10.4.2. Dağılımlara Uyum Kontrolü

Üzerinde çalışılan her özellik dağılım fonksiyonu belirlenmiş bir dağılım gösterir. Çalışılan özelliklerin en yaygın olarak gösterdiği dağılımlar binomiyal, Poisson ve normal dağılımlardır. Bu dağılımlar BÖLÜM IV'te açıklanmıştır. Yapılan araştırmalarda üzerinde çalışılan özelliğe ait toplanan verilerin, BÖLÜM IV'te açıklanan dağılımlardan birine uyum gösterip göstermediği dağılımlara uyum kontrolü yardımıyla belirlenebilir.

10.4.2.1. Binom Dağılımına Uyum Kontrolü

Bölüm 4.1.2'de herhangi bir dersten öğrencilerin %60'nın başarılı olduğu saptanmıştır. Başarı oranı %60 olarak saptanan bu öğrencilerden 5'er öğrencilik 250 örnekte başarılı öğrenci sayısı bakımından gözlenen ve π=0.60 olan binomiyal dağılımına göre beklenen frekanslar Tablo 4.3'te verilmişti. 250 örnekte başarılı öğrenci sayısı bakımından gözlenen ve π=0.60 olan binomiyal dağılımına göre beklenen frekansları belirleyen araştırıcı, 250 örneğin başarılı öğrenci sayısı bakımından dağılımının π=0.60 olan binomiyal dağılıma uygun olup olmadığını kontrol edebilir.

Yapılan çalışmada oluşturulan 250 tesadüf örneğinde başarılı öğrenci sayısı bakımından dağılımın π=0.60 olan binomiyal dağılıma uygun olup olmadığını kontrol etmek için önce kontrol ve karşıt hipotezlerin kurulması gerekir.

H_0: Üzerinde çalışılan 250 örnekte başarılı öğrenci sayısı, π=0.60 ve n=5 olan binomiyal dağılıma uygun dağılmaktadır. Beklenen ve gözlenen frekanslar arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir.

H_1: Üzerinde çalışılan 250 örnekte başarılı öğrenci sayısı, π=0.60 ve n=5 olan binomiyal dağılıma uygun dağılmamaktadır. Beklenen ve gözlenen frekanslar arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir.

Ki-kare testlerinde ki-kare değeri hesaplanırken beklenen frekansların 5'ten küçük olmaması gerekir. Tablo 10.5'te 1. sınıfın, yani 250 örnekte başarılı öğrenci olmaması durumu için beklenen frekans 2.56 olarak hesaplanmış olup 5'ten küçüktür. Bu sebeple 1. ve 2. sınıflar birleştirilerek ki-kare değeri hesaplanmıştır.

250 örneğin başarılı öğrenci sayısı bakımından dağılımının π=0.60 olan binomiyal dağılıma uygun olup olmadığını kontrol etmek için ki-kare değerinin hesaplanması Tablo 10.5'te gösterilmiştir.

TABLO 10.5. 5'er öğrencilik 250 örnekte başarılı öğrenci sayısı bakımından gözlenen ve π=0.60 olan binomiyal dağılımına göre beklenen frekanslar ve binomiyal dağılım uygunluk kontrolü için ki-kare değerinin hesaplanması

Başarılı öğrenci sayısı (r)	Gözlenen frekans (f)	Beklenen frekans (f')	$\frac{(f-f')^2}{f'}$
0 1	4 23 27	2.56 19.20 21.76	1.262
2	54	57.60	0.225
3	91	86.40	0.245
4	61	64.80	0.223
5	17	19.44	0.306
Toplam	250	250	χ^2=2.261

Araştırıcı I. tip hata olasılığını %5 olarak belirlemiş olsun. Beklenen frekanslar bulunurken populasyona ait başarı oranı kullanılmıştır. Beklenen frekanslar 250 örnekten hesaplandığı için serbestlik derecesi 5-1=4'tür. 4 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında %5'lik alan Tablo D'den 9.488 olarak bulunur. Hesaplanan χ^2-değerinin (χ^2=2.261) 4 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına dahil olma olasılığı %5'ten büyüktür. Yani kontrol hipotezinin kabul bölgesindedir. Bu durumda kontrol hipotezi kabul edilir. Üzerinde çalışılan 250 örnekte başarılı öğrenci sayısının, π=0.60 ve n=5 olan binomiyal dağılıma uygun dağıldığı kararına varılır.

Ki-kare testi kullanılarak binomiyal dağılıma uyum kontrolünde serbestlik derecesi hesaplanırken, sınıf sayısından 1 ve populasyonun parametresi olan π yerine örnekten hesaplanan p kullanıldığı için de 1 olmak üzere sınıf sayısından iki çıkarılır. Eğer populasyona ait istenen olayın oluş olasılığı biliniyor ise serbestlik derecesi hesaplanırken sınıf sayısından için 1 çıkarılır.

10.4.2.2. Poisson Dağılımına Uyum Kontrolü

Bölüm 4.2.3'te, sebze yetiştiricileri için hazırlanan ve içinde yaklaşık olarak 500 biber tohumu bulunan ambalajlardan 250 adet rastgele alınmış ve bu ambalajlardaki tohumlardan ölü veya canlı olanların sayısı belirlenmiş ve içlerinde yaklaşık olarak 500 biber tohumu bulunan 250 ambalaj için ölü tohum sayısı için gözlenen ve Poisson dağılımına göre beklenen frekanslar Tablo 4.6'da verilmiştir.

Bu çalışmada, 250 tohum ambalajındaki ölü tohumların ortalaması 2.48 olan Poisson dağılımına uygun bir dağılım gösterip göstermediği ki-kare testi kullanılarak kontrol edilecektir.

H_0: İçinde yaklaşık 500 adet biber tohumu bulunan 250 ambalajdaki ölü tohum sayısı ortalaması 2.48 olan Possion dağılımına uygun bir dağılım göstermektedir. Beklenen ve gözlenen frekanslar arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir.

H_1: İçinde yaklaşık 500 adet biber tohumu bulunan 250 ambalajdaki ölü tohum sayısı ortalaması 2.48 olan Possion dağılımına uygun bir dağılım göstermemektedir. Beklenen ve gözlenen frekanslar arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir.

Tablo 10.6'da 7. ve 8. sınıfların beklenen frekansı 5'ten küçük olduğu için son üç sınıf birleştirilmiştir. 250 biber tohumu ambalajında ölü tohum sayısının dağılımının ortalaması 2.48 olan Possion dağılımına uygun olup olmadığını kontrol etmek için ki-kare değerinin hesaplanması Tablo 10.6'da gösterilmiştir.

Araştırıcı I. tip hata olasılığını %5 olarak belirlemiş olsun. Bu kontrolde serbestlik derecesi (7-2)=5'tir. Çünkü 250 biber ambalajının alındığı tohum populasyonu için ölü tohum sayısı örnekten tahmin edilmiş ve beklenen ölü tohum sayısı 250 ambalajlık örnekten hesaplanmıştır. 5 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında %5'lik alan Tablo D'den 11.070 olarak bulunur.

Tablo 10.6. 250 ambalaj için gözlenen ve Poisson dağılımına göre beklenen frekanslar ve Poisson dağılımına uygunluk kontrolü için ki-kare değerinin hesaplanması

Ölü tohum sayısı	Gözlenen frekans (f)	Beklenen frekans (f')	$\frac{(f-f')^2}{f'}$
0	31	20.94	4.833
1	50	51.92	0.071
2	56	64.38	1.091
3	44	53.22	1.597
4	38	33.00	0.758
5	20	16.37	0.805
6 7 8	5 4 2 11	6.76 2.40 1.01 10.17	0.068
Toplam	250	250	χ^2=9.223

Hesaplanan χ^2-değerinin (χ^2=9.223), 5 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına dahil olma olasılığı %5'ten büyüktür. Yani kontrol hipotezinin kabul bölgesindedir. Bu durumda kontrol hipotezi kabul edilir. Dolayısıyla içinde yaklaşık 500 adet biber tohumu bulunan 250 ambalajdaki ölü tohum sayısı, ortalaması 2.48 olan Possion dağılımına uygun bir dağılım göstermektedir kararına varılır.

Ki-kare testi kullanılarak Poisson dağılımına uyum kontrolünde serbestlik derecesi hesaplanırken, sınıf sayısından 1 ve populasyonun parametresi olan μ yerine örnekten hesaplanan $\bar{X}$ kullanıldığı için de 1 olmak üzere sınıf sayısından iki çıkarılır. Eğer populasyona ait ortalama (μ) biliniyor ise serbestlik derecesi hesaplanırken sınıf sayısından 1 çıkarılır.

10.4.2.3. Normal Dağılıma Uyum Kontrolü

Bölüm 4.3.3'te 60 fasulye ağırlığının gözlenen ve ortalaması 0.661 ve standart sapması 0.0819 olan normal dağılıma göre beklenen frekansları Tablo 4.7'de verilmiştir. Araştırıcı, 60 fasulye ağırlığının, ortalaması 0.661 ve standart sapması 0.082 olan normal dağılıma uygun bir dağılım gösterip göstermediğini kontrol etmek istemektedir.

Yapılan çalışmada, 60 fasulye ağırlığının ortalaması 0.661 ve standart sapması 0.082 olan normal dağılıma uygun bir dağılım gösterip göstermediğini kontrol etmek için önce kontrol ve karşıt hipotezlerin kurulması gerekir.

H_0: 60 fasulye ağırlığı ortalaması 0.661 ve standart sapması 0.082 olan normal dağılıma uygun dağılım göstermektedir. Gözlenen ve beklenen frekanslar arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir.

H_1: 60 fasulye ağırlığı ortalaması 0.661 ve standart sapması 0.082 olan normal dağılıma uygun dağılım göstermemektedir. Gözlenen ve beklenen frekanslar arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir.

Tablo 10.7'de, 1. sınıfın beklenen frekansı 5'ten küçük olduğu için 2. sınıfla ve 9. sınıfın beklenen frekansı 5'ten küçük olduğu için 8. sınıf ile birleştirilmiştir. 60 fasulye ağırlığının ortalaması 0.661 ve standart sapması 0.082 olan normal dağılıma uygun olup olmadığını kontrol etmek için ki-kare değerinin hesaplanması Tablo 10.7'de gösterilmiştir.

Tablo 10.7. 60 fasulye tanesinin ağırlığına ait gözlenen ve ortalaması 0.661 ve standart sapması 0.082 olan normal dağılıma göre beklenen frekanslar ve normal dağılıma uygunluk kontrolü için ki-kare değerinin hesaplanması

Sınıflar	Gözlenen frekans (f)	Beklenen frekans (f')	$\frac{(f - f')^2}{f'}$
0.48 - 0.51 0.52 - 0.55	2 5 7	2.250 3.660 5.91	0.201
0.56 - 0.59	6	6.630	0.060
0.60 - 0.63	9	9.930	0.088
0.64 - 0.67	13	11.580	0.174
0.68 - 0.71	8	10.674	0.670
0.72 - 0.75	9	7.770	0.195
0.76 - 0.79 0.80 - 0.83	5 3 8	4.476 3.030 7.506	0.033
Toplam	60	60	χ^2=1.421

Araştırıcı I. tip hata olasılığını %5 olarak belirlemiş olsun. Bu kontrolde serbestlik derecesi (sınıf sayısı-3)=(7-3)=4'tür. Çünkü 60 fasulye kullanılmıştır, yani örnek genişliği 60'tır, fasulye populasyonunun ağırlık ortalaması ve standart sapması örnekten hesaplanmıştır. Bu sebeple serbestlik derecesi bulunurken sınıf sayısından 3 çıkarılmıştır. 4 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında %5'lik alan Tablo D'den 9.488 olarak bulunur. Hesaplanan χ^2-değerinin (χ^2=1.421) 4 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına dahil olma olasılığı %5'ten büyüktür. Yani kontrol hipotezini kabul bölgesindedir. Bu durumda kontrol hipotezi kabul edilir. Dolayısıyla 60 fasulye ağırlığı, ortalaması 0.661 ve standart sapması 0.082 olan normal dağılıma uygun dağılım göstermiştir kararına varılır.

Ki-kare testi kullanılarak Normal dağılıma uyum kontrolünde serbestlik derecesi hesaplanırken, sınıf sayısından 1 ve populasyonun parametreleri olan μ ve σ yerine örnekten hesaplanan $\bar{X}$ ve S kullanıldığı için de her birisi için 1'er olmak üzere sınıf sayısından toplam olarak üç çıkarılır. Eğer populasyona ait ortalama ve standart sapma (μ ve σ) biliniyor ise serbestlik derecesi hesaplanırken sınıf sayısından 1 çıkarılır.

10.5. Bağımsızlık Kontrolleri

Toplanan veriler çeşitli faktör yada faktörlerin çeşitli hallerine göre sınıflandırılarak iki yanlı tablolar oluşturulabilir. Örneğin, herhangi bir dersten sınava girmiş öğrenciler cinsiyetlerine ve başarı durumlarına göre iki yanlı tablo oluşturulabilir veya yapılan bir zararlıyla mücadele çalışmasında böceklerin ölü, canlı veya felçli olma durumları kullanılan farklı ilaç çeşitlerine veya dozlarına göre sınıflandırılarak iki yanlı tablo oluşturulabilir.

Ele alınan faktörün hallerine göre sınıflandırılarak oluşturulan iki yanlı tablolar RxC tabloları olarak adlandırılır. Burada R, İngilizce row (sıra) ve C İngilizce column (sütun) kelimelerinin ilk harfleridir. RxC tabloları çalışılan özelliğin hallerine göre 2x3, 2x2, 3x4 vb. şeklinde düzenlenmiş olabilir. İki yanlı tabloda sıra ve sütunların kesiştiği noktalar hücre veya göz olarak adlandırılır.

Toplanan veriler iki yanlı tablo şeklinde düzenlendiği zaman üzerinde durulan faktörlerden birinin hallerine göre olan dağılımın diğer faktörün hallerine bağımlı (veya bağımsız) olup olmadığının kontrol edilmesi gerekebilir. Başka bir deyişle araştırıcı, iki özelliğin birbirinden bağımsız olup olmadığını kontrol etmek isteyebilir. Bu durumda bağımsızlık kontrolünün yapılması gerekir.

10.5.1. Ki-Kare Bağımsızlık Kontrolü

Bir araştırmada toplanan veriler, Tablo 10.7'de görüldüğü şekilde iki yanlı tablo olarak düzenlenmiş olabilir. İki yanlı tabloda her bir gözün frekansı a, b, c ve d ile gösterilmiştir. Bu durumda iki özelliğin birbirinden bağımsız olup olmadığı ki-kare bağımsızlık kontrolü uygulanarak kontrol edilebilir.

Tablo 10.7. İki özelliğin ikişer hali dikkate alınarak oluşturulmuş 2x2 tablosu

	A1	A2	Toplam
B1	a	b	a+b
B2	c	d	c+d
Toplam	a+c	b+d	N

Bağımsızlık kontrolü yapılırken de önce kontrol ve karşıt hipotezlerin aşağıdaki şekilde kurulması gerekir.

H_0: Gözlemlerin birinci faktörün hallerine göre dağılımı, ikinci faktörün hallerine göre değişmemektedir. Birinci faktörün hallerine göre olan dağılım ikinci faktörün hallerinden bağımsızdır. Kısaca, $(f - f') = 0$'dır.

H_1: Gözlemlerin birinci faktörün hallerine göre dağılımı, ikinci faktörün hallerine göre değişmektedir. Birinci faktörün hallerine göre olan dağılım ikinci faktörün hallerinden bağımsız değildir (bağımlıdır). Kısaca, $(f - f') \neq 0$'dır.

Hipotezler kurulduktan sonra hangi hipotezin kabul edileceğine karar vermek için (10.3) numaralı eşitlik kullanılarak χ^2 değeri hesaplanır. Ki-kare değerinin hesaplanabilmesi için önce iki yanlı tablodaki her göze ait beklenen frekansların hesaplanması gerekir. Beklenen frekanslar aşağıda açıklandığı şekillerde hesaplanabilir:

1. Eğer kontrol hipotezi doğru ise, yani gözlemlerin birinci faktörün hallerine göre dağılımı, ikinci faktörün hallerine göre değişmiyorsa A1 halinin B1 ve B2'de gözlenme olasılığı $\frac{a+c}{N}$ ve A2 halinin B1 ve B2'de gözlenme olasılığı $\frac{b+d}{N}$'dir. Bu durumda B1 halini gösteren (a+b) tane bireyden $f' = (a+b)\,x\left(\frac{a+c}{N}\right)$ tanesinin ve B2 halini gösteren (c+d) tane bireyden de $f' = (c+d)\,x\left(\frac{a+c}{N}\right)$ tanesinin A1 halini göstermesi beklenir. Benzer şekilde B1 halini gösteren (a+b) tane bireyden $f' = (a+b)\,x\left(\frac{b+d}{N}\right)$ tanesinin ve B2 halini gösteren (c+d) tane bireyden de $f' = (c+d)\,x\left(\frac{b+d}{N}\right)$ tanesinin A2 halini göstermesi beklenir.

2. Bağımsız olayların birlikte gözlenme olasılığı, olayların olasılıklarının çarpımına eşittir. Eğer kontrol hipotezi doğru ise A ve B özellikleri birbirinden bağımsızdır. Bu durumda A1 ve B1 hallerinin birlikte gözlenme olasılığı $\left(\frac{a+b}{N}\right)x\left(\frac{a+c}{N}\right)$'dir. Bu durumda N tane bireyden $f' = N\,x\left(\frac{a+b}{N}\right)x\left(\frac{a+c}{N}\right)$ tanesinin A1 ve B1 halini göstermesi beklenir. Görüldüğü gibi bu şekilde hesaplanan beklenen frekans bir önceki beklenen frekanstan başka bir şey değildir.

3. Beklenen frekanslar 1. veya 2. şekillerde hesaplanabilir. Fakat iki yanlı tablodaki satır ve sütun sayısı arttıkça 1. ve 2. şekilde açıklandığı gibi beklenen frekansların hesaplanmasında hata olasılığı artar. Her bir göz için beklenen frekansın daha kolay hesaplanabilmesi için (10.5) numaralı eşitlikte verilen eşitlik kullanılabilir.

$$\begin{bmatrix}\text{Herhangi bir gözün}\\ \text{beklenen frekansı}\end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix}\text{Beklenen frekansı}\\ \text{hesaplanacak gözün}\\ \text{satır toplamı}\end{bmatrix} x \begin{bmatrix}\text{Beklenen frekansı}\\ \text{hesaplanacak gözün}\\ \text{sütun toplamı}\end{bmatrix}}{[\text{Genel toplam}]} \qquad \ldots(10.5)$$

İki yanlı tablodaki her bir göz için beklenen frekanslar hesaplandıktan sonra (10.3) numaralı eşitlik kullanılarak ki-kare değeri $\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(f-f')^2}{f'}$ şeklinde hesaplanır. Eşitlikte k: iki yanlı tablodaki toplam göz sayısıdır.

Daha önce de açıklandığı gibi ki-kare dağılımı serbestlik derecesine bağlı bir dağılımdır.

Ki-kare değerinin hesaplanabilmesi için önce her göz için beklenen frekansların hesaplanması gerekir.

Beklenen frekansların toplamı ile gözlenen frekansların toplamı birbirine eşit olması gerektiğinden iki satır ve sütundan oluşan iki yanlı tablolarda, yani 2x2 tablolarında gözlerden her hangi biri için beklenen frekanslar hesaplandıktan sonra diğer gözlerin beklenen frekansları gözlenen frekansların satır ve sütun toplamlarından söz konusu gözün beklenen frekansı çıkarılarak da bulunabilir. Başka bir değişle iki yanlı tablolarda bir gözün beklenen frekansının hesaplanması için bir gözün beklenen frekansının hesaplanması yeterlidir. Bu sebeple de 2x2 tablolarında (10.3) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanan ki-kare değeri 1 serbestlik dereceli ki-kare dağılımı gösterir.

Oluşturulan iki yanlı tabloların satır ve sütun sayısı arttıkça yukarıda açıklandığı şekilde serbestlik derecesinin belirlenmesi zorlaşır. İki yanlı tablolarda bağımsızlık kontrolü yapılırken hesaplanan ki-kare istatistiğinin serbestlik derecesinin belirlenmesi için (10.6) numaralı eşitlik kullanılabilir.

$$\text{Serbestlik derecesi} = (\text{Satır sayısı} - 1)\text{x}(\text{Sütun sayısı} - 1) \qquad \ldots(10.6)$$

Ki-kare değeri (10.3) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplandıktan ve hesaplanan ki-kare değerinin serbestlik derecesi (10.6) numaralı eşitlik kullanılarak belirlendikten sonra, hesaplanan ki-kare değeri tablo değeri ile karşılaştırılarak hangi hipotezin kabul edileceğine karar verilir.

ÖRNEK 1:

Migren hastalığının cinsiyetten bağımsız olup olmadığını belirlemek üzere 400 bireyin cinsiyetlerine ve migren hastalığı olup olmamasına göre dağılımı Tablo 10.8'de verildiği gibi saptanmıştır. Bu sonuçlara göre Migren hastalığının cinsiyetten bağımsız olduğu söylenebilir mi?

Tablo 10.8. 400 bireyin cinsiyete ve migren hastalığına göre dağılımı ve her göz için beklenen frekanslar

	Migren Var	Migren Yok	Toplam
Kız	$\mathbf{f=85}$ $f'=\frac{120x250}{400}=75$	$\mathbf{f=165}$ f'=250-75=175 veya $f'=\frac{280x250}{400}=175$	250
Erkek	$\mathbf{f=35}$ f'=120-75=45 veya $f'=\frac{120x150}{400}=45$	$\mathbf{f=115}$ f'=280-175=105 veya $f'=\frac{280x150}{400}=105$	150
Toplam	120	280	400

Migren hastası olup olmamanın cinsiyetten bağımsız olup olmadığının araştırılması için ki-kare bağımsızlık kontrolünün yapılması gerekir. Bunun için ilk olarak aşağıdaki şekilde hipotezler kurulur:

H_0: Migren hastası olup olmama cinsiyete göre değişmemektedir. Migren hastası olma durumu ile cinsiyet birbirinden bağımsızdır. Kısaca, $(f - f') = 0$'dır. Yani her göz için gözlenen ile beklenen frekanslar arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir.

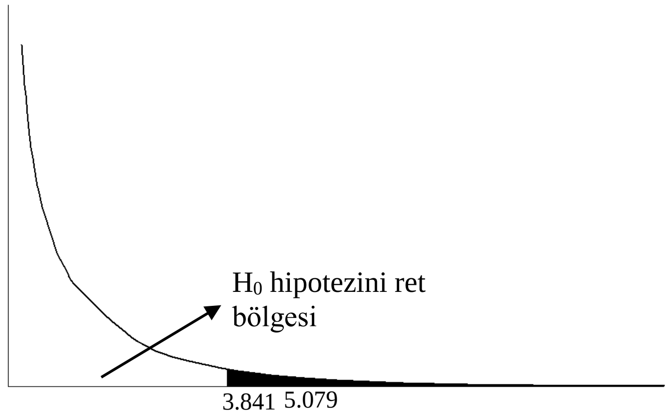
H_1: Migren hastası olup olmama cinsiyete göre değişmektedir. Migren hastası olma durumu ile cinsiyet birbirinden bağımsız değildir. Kısaca, $(f - f') \neq 0$'dır. Yani her göz için gözlenen ile beklenen frekanslar arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir.

Hipotezler kurulduktan sonra her göze ait beklenen frekanslar Tablo 10.8'de gösterildiği gibi hesaplanır. Beklenen frekanslar hesaplandıktan sonra (10.3) numaralı eşitlik kullanılarak ki-kare değeri;

$$\chi^2 = \frac{(85-75)^2}{75} + \frac{(165-175)^2}{175} + \frac{(35-45)^2}{45} + \frac{(115-105)^2}{105} = 5.079$$

olarak hesaplanır.

Ki-kare değeri hesaplandıktan sonra serbestlik derecesinin hesaplanması gerekir. Tablo 10.8'de görüldüğü gibi 2x2 tablolarında bir gözün beklenen frekansının hesaplanması yeterlidir. Diğer gözlerin beklenen frekansları, hesaplanan beklenen frekansın ilgili satır ve sütun toplamlarından çıkarılarak bulunabilir. Bu sebeple 2x2 tablolarında serbestlik derecesi 1'e eşittir. Eğer 10.6 numaralı eşitlik kullanılarak serbestlik derecesi hesaplanacak olursa SD=(2-1)x(2-1)=1 olarak bulunur. Tablo D'de 1 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında %5'lik alan 3.841 değerinden başlamaktadır. Şekil 10.3'te görüldüğü gibi hesaplanan ki-kare değeri 5.079 olup 3.841 değerinden büyüktür ve kontrol hipotezinin ret bölgesine düşmektedir.



ŞEKİL 10.3. 1 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında H_0 hipotezini ret ve kabul bölgeleri

Bu durumda kontrol hipotezi ret edilir. Yani migren hastası olup olmama durumu cinsiyete göre değişmektedir. Araştırıcı, migren olup olmama durumu ile cinsiyetin birbirine bağımlı olduğu kararına varır.

ÖRNEK 2:

Bir bölgede tesadüfen seçilen 500 kişinin meslek grupları ve doğum yerlerine göre dağılımı Tablo 10.9'daki gibi gözlenmiştir. Gözlenen bu dağılım doğrultusunda bir meslek grubunu tercih etmenin doğum yerinden bağımsız olduğu ileri sürülebilir mi?

Tablo 10.9. 500 kişinin meslek grupları ve doğum yerlerine göre dağılımı ve her bir göz için beklenen frekanslar

	Köy	Kasaba	Şehir	Toplam
Öğretmen	$\mathbf{f=55}$ $f' = \frac{150x145}{500}$ $f'=43.5$	$\mathbf{f=70}$ $f' = \frac{150x185}{500}$ $f'=55.5$	$\mathbf{f=25}$ $f'=51$	150
Avukat	$\mathbf{f=25}$ $f' = \frac{130x145}{500}$ $f'=37.7$	$\mathbf{f=45}$ $f' = \frac{130x185}{500}$ $f'=48.1$	$\mathbf{f=60}$ $f'=53.45$	130
Mühendis	$\mathbf{f=30}$ $f' = \frac{105x145}{500}$ $f'=30.45$	$\mathbf{f=25}$ $f' = \frac{105x185}{500}$ $f'=38.85$	$\mathbf{f=50}$ $f'=35.7$	105
Doktor	$\mathbf{f=35}$ $f'=33.35$	$\mathbf{f=45}$ $f'=42.55$	$\mathbf{f=35}$ $f'=29.85$	115
Toplam	145 (145)	185 (185)	170 (170)	500

Meslek grubu tercih etmenin doğum yerinden bağımsız olup olmadığını kontrol etmek için ki-kare bağımsızlık kontrolünün yapılması gerekir. Bunun için ilk olarak aşağıdaki şekilde hipotezler kurulur:

H_0: Meslek grubu tercihi doğum yerine göre değişmemektedir. Seçilen meslek, doğum yerinden bağımsızdır. Kısaca, $(f - f') = 0$ 'dır. Yani her göz için gözlenen ile beklenen frekanslar arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir.

H_1: Meslek grubu tercihi doğum yerine göre değişmektedir. Seçilen meslek, doğum yerine bağımlıdır. Kısaca, $(f - f') \neq 0$ 'dır. Yani her göz için gözlenen ile beklenen frekanslar arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir.

Hipotezler kurulduktan sonra her göze ait beklenen frekanslar Tablo 10.9'da görüldüğü gibi hesaplanır. Tablo 10.9'da görüldüğü gibi 6 gözün beklenen frekansları (10.5) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplandıktan sonra taralı gözlerin beklenen frekansları her satırda hesaplanan beklenen frekans toplamları satır toplamlarından çıkarılarak hesaplanmıştır. Örneğin şehirde doğup öğretmen olan bireyler için beklenen frekans 150-(43.5-55.5) olarak hesaplanmış ve $f'=51$ olarak bulunmuştur. Diğer taralı gözlerin beklenen frekansları da benzer şekilde hesaplanmıştır.

Beklenen frekanslar hesaplandıktan sonra (10.3) numaralı eşitlik kullanılarak ki-kare değeri;

$$\chi^2 = \frac{(55 - 43.5)^2}{43.5} + \frac{(70 - 55.5)^2}{55.5} + \ldots + \frac{(45 - 42.55)^2}{42.55} + \frac{(35 - 29.85)^2}{29.85}$$

χ^2= 41.534 olarak hesaplanır.

Ki-kare değeri hesaplandıktan sonra serbestlik derecesinin belirlenmesi gerekir. Altı gözün beklenen frekansı hesaplandıktan sonra diğer gözlerin beklenen frekanslarının satır ve sütun toplamları kullanılarak hesaplanması serbestlik derecesinin 6 olduğunu gösterir. Serbestlik derecesinin daha kolay belirlenmesi için (10.6) numaralı eşitlik kullanılarak serbestlik derecesi SD=(4-1)x(3-1)=6 olarak bulunur.

Tablo D'den 6 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında %5'lik alan 12.592 değerinden başladığı görülür. Hesaplanan ki-kare değeri 41.534 olup tablo değerinden büyüktür ve kontrol hipotezinin ret bölgesine düşmektedir. Bu durumda kontrol hipotezi ret edilir ve meslek grubu tercih etmenin doğum yerinden bağımsız olmadığı, yani bireylerin meslek tercihlerinin doğum yerine göre değiştiği kararına varılır.

10.5.2. Bağımlılık (Contingency) Katsayısı

Düzenlenen iki yanlı tablolarda bağımsızlık kontrolü yapılarak kontrol hipotezi ret edilmiş ise bu iki faktör arasında bir bağımlılığın olduğunu gösterir. Böyle durumlarda bağımlılığın derecesinin belirlenmesi gerekir. Bu amaçla yaygın olarak kullanılan istatistiklerden biri Pearson'un bağımlılık katsayısı (**coefficient of contingency)** kullanılır. Bağımlılık katsayısı kısaca CC (coefficient of contingency) ile gösterilir ve (10.7) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

$$CC = \sqrt{\frac{\chi^2}{N + \chi^2}} \qquad \ldots(10.7)$$

Bağımsızlık kontrollerinde kontrol hipotezinin reddedilmesi durumunda (10.7) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanan bağımlılık katsayısı iki özellik arasındaki bağımlılığın derecesini verir. Fakat bağımlılığın yönü hakkında bir bilgi vermez. İki özellik birbirine tam bağımlı olsa dahi (10.7) numaralı eşitlikten görüldüğü gibi bağımlılık katsayısı 1 (%100) değerine ulaşmaz. Bu sebeple hesaplanan bağımlılık katsayınsın, RxC tablolarında alabileceği en büyük değere göre düzeltilmesi gerekir. Düzenlenen RxC tablolarında bağımlılık katsayısının alabileceği en büyük değer (10.8) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır. İki yanlı tablolar düzenlenirken satır ve sütunların yeri değiştirilebileceğinden CC_{max}, CC_{max1} ile CC_{max2}'nin ortalaması olarak da hesaplanabilir.

$$R<C \text{ ise } CC_{max1} = \sqrt{\frac{R-1}{R}}$$

$$C<R \text{ ise } CC_{max2} = \sqrt{\frac{C-1}{C}} \qquad \ldots(10.8)$$

$$CC_{max} = \frac{CC_{max1} + CC_{max2}}{2}$$

RxC tablolarında (10.8) numaralı eşitlik kullanılarak bağımlılık katsayısının alabileceği en büyük değer hesaplandıktan sonra düzeltilmiş bağımlılık katsayısı (10.9) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

$$CC_{düzeltilmiş} = \frac{CC}{CC_{max1}} \quad \text{veya}$$

$$CC_{düzeltilmiş} = \frac{CC}{CC_{max2}} \quad \text{veya} \qquad \ldots(10.9)$$

$$CC_{düzeltilmiş} = \frac{CC}{CC_{max}}$$

Örneğin, Bölüm 10.5.1'de ÖRNEK 2'de, meslek grubu tercih etmenin doğum yerinden bağımsız olup olmadığını kontrol etmek için ki-kare değeri 41.534 olarak hesaplanarak meslek grubu tercih etmenin doğum yerinden bağımsız olmadığı, yani bireylerin meslek tercihlerinin doğum yerine göre değiştiği kararına varılmıştır. İki özellik arasındaki bağımlılığın derecesi (10.7) numaralı eşitlikten;

$CC = \sqrt{\frac{41.534}{41.534 + 500}} = 0.277$, yani %27.7 olarak bulunur.

Hesaplanan bağımlılık katsayısı meslek grubu seçimi ile doğum yeri arasında %27.7'lik bir bağımlılığın olduğunu gösterir. Düzenlenen iki yanlı tabloda sütun sayısı satır sayısından az olduğu için (10.8) numaralı eşitlikten $CC_{max2} = \sqrt{\frac{3-1}{3}} = 0.816$ olarak bulunur. Eğer bu örnekte satır ve sütunların yerini değiştirilmiş olsaydı bu durumda satır sayısı sütun sayısından az olacak ve (10.8) numaralı eşitlikten $CC_{max1} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = 0.866$ olarak bulunacaktı. Bu durumda bağımlılık katsayının alabileceği en büyük değer $CC_{max} = \frac{0.816 + 0.866}{2} = 0.841$ olarak hesaplanır. Düzeltilmiş bağımlılık katsayısı ise (10.9) numaralı eşitlik kullanılarak;

$CC_{düzeltilmiş} = \frac{0.277}{0.841} \cong 0.33$ olarak hesaplanır. Hesaplanan bağımlılık katsayısı meslek grubu seçimi ile doğum yeri arasında %33'lük bir bağımlılığın olduğu bulunmuş olur.

10.5.3. Fisher'in Kesin Olasılık (Fisher's Exact) Testi

Ki-kare bağımsızlık testi oluşturulan iki yanlı tablodaki gözlerin beklenen frekansının 5'ten az olmaması durumunda güvenilir sonuçlar verir. İki yanlı tablolar küçük örnekler için düzenlendiği zaman gözlerin beklenen frekansı 5'ten küçük olacağı için R.A. Fisher tarafından geliştirilen Fisher'in Kesin Olasılık testi kullanılır. Düzenlenen RxC tabloları için beklenen frekansın 5'ten küçük olması durumunda Fisher tarafından önerilen test de Fisher-Freeman-Halton testi olarak bilinir.

Küçük bir örnek için 2x2 tablo, Tablo 10.7'de görüldüğü ve aşağıda verildiği gibi düzenlenmiş olsun. İki yanlı tablodaki göz frekanslarının A ve B faktörleri arasında herhangi bir bağımlılığın olmadığı bir populasyondan çekilmiş olma olasılığı (10.10) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

	A1	A2	Toplam
B1	a	b	a+b
B2	c	d	c+d
Toplam	a+c	b+d	N

$$P = \frac{(a+b)!(c+d)!(a+c)!(b+d)!}{a!b!c!d!N!} \qquad \ldots(10.10)$$

İlk olarak (10.10) numaralı eşitlik kullanılarak düzenlenen tablonun A ve B faktörleri bağımsız olan populasyondan alınmış olma olasılığı hesaplanır. Daha sonra her bir göz için gözlenen frekanslardan daha uç hallerin olasılıkları hesaplanır. Bu olasılıklar hesaplanırken düzenlenen tablodaki satır ve sütun toplamları değişmeyecek şekilde daha uç tablolar hazırlanır. Gözlenen ve daha uç tablolar için hesaplanan olasılıklar toplanarak gözlenen ve daha uç hallerin meydana gelme olasılığı hesaplanır. Fisher'in kesin Olasılık Testinde hesaplanan olasılık, tek taraflı olasılıktır.

ÖRNEK:

Karadeniz bölgesinde tesadüfen seçilen 30 kişinin çay bahçesinde çalışma durumlarının cinsiyete göre dağılımı Tablo 10.10'da verildiği gibi gözlenmiştir.

Tablo 10.10. 30 kişinin çay bahçesinde çalışma durumlarının cinsiyete göre dağılımı

	Çay bahçesinde çalışan	Çay bahçesinde çalışmayan	Toplam
Kadın	$\mathbf{f = 16}$	$\mathbf{f = 2}$	18
Erkek	$\mathbf{f = 8}$	$\mathbf{f = 4}$	12
Toplam	24	6	30

Bu örnekte çay bahçesinde çalışıp çalışmamanın cinsiyetten bağımsız olup olmadığı kontrol edilmek istenmektedir. Düzenlenen iki yanlı tablo için ki-kare bağımsızlık testi uygulandığı zaman gözlerden biri için hesaplanan beklenen frekansın 5'ten küçük olduğu görülür. Elde edilen sonucun güvenilir olması için Fisher'in Kesin Olasılık testi uygulanır. Fisher'in Kesin Olasılık testi uygulanırken de ilk olarak hipotezler aşağıdaki şekilde kurulur.

H_0: Çay bahçesinde çalışıp çalışmama cinsiyetten bağımsızdır. Çay bahçesinde çalışıp çalışmama cinsiyete göre değişmemektedir.

H_1: Çay bahçesinde çalışıp çalışmama cinsiyetten bağımsız değildir. Çay bahçesinde çalışıp çalışmama cinsiyete göre değişmektedir.

Hipotezler kurulduktan sonra Fisher'in Kesin Olasılık est aşağıda açıklandığı şekilde uygulanır. İlk olarak gözlenen tablonun gözlenme olasılığı hesaplanır. Daha sonra gözlenen tablodan daha uç gözlenebilecek tabloların olasılıkları aşağıda görüldüğü gibi hesaplanarak bulunan olasılıklar toplanır. Bulunan olasılık gözlenen ve daha uç tabloların gözlenme olasılığıdır.

16	2	18
4	8	12
20	10	30

Gözlenen tablo için olasılık:

$$P = \frac{(a+b)!(c+d)!(a+c)!(b+d)!}{a!b!c!d!N!}$$

$$P = \frac{18!12!20!10!}{16!2!4!8!30!} = 0.002521$$

17	1	18
3	9	12
20	10	30

Daha uç tablo için olasılık:

$$P = \frac{(a+b)!(c+d)!(a+c)!(b+d)!}{a!b!c!d!N!}$$

$$P = \frac{18!12!20!10!}{17!1!3!9!30!} = 0.0001318$$

18	0	18
2	10	12
20	10	30

En uç tablo için olasılık:

$$P = \frac{(a+b)!(c+d)!(a+c)!(b+d)!}{a!b!c!d!N!}$$

$$P = \frac{18!12!20!10!}{18!0!2!10!30!} = 0.000002196$$

Gözlenen ve daha uç tabloların gözlenme olasılıkları hesaplandıktan sonra bu olasılıklar toplanır ve toplam olasılık;

$P=0.002521+0.0001318+0.000002196 \cong 0.002655$ olarak bulunur. Bu olasılık sola doğru gözlenebilecek uç tabloların gözlenme olasılığıdır ve tek taraflı olasılıktır.

I. tip hata olasılığı %5 olarak kararlaştırılmış ise hesaplanan olasılık %5'ten küçük olduğu için kontrol hipotezi reddedilir ve çay bahçesinde çalışıp çalışmamanın cinsiyetten bağımsız olmadığı kararına varılır.

Hesaplanan olasılık tek taraflı olasılık olduğu için çift taraflı olasılık bu olasılığın iki katı alınarak bulunabileceği gibi sağ tarafa doğru gözlenebilecek uç tabloların olasılıklarının toplamı bulunarak da hesaplanabilir. Hesaplanan tek taraflı olasılığın iki katı alınarak bulunan çift taraflı olasılık ile diğer tarafa doğru uç tabloların olasılıklarının toplamının tek taraflı olasılığa eklenerek bulunacak çift taraflı olasılık arasındaki fark iki satır ve sütun toplamı arasındaki fark arttıkça artar.

Hesaplanan olasılık tek taraflı olasılığın iki katı alınarak çift taraflı olasılık $P=2(0.002655)=0.00531$ olarak bulunur.

10.5.4. G-testi

Düzenlenen iki yanlı tablolarda bağımsızlık kontrolü için yaygın olarak kullanılan yöntemlerden biri de G-testidir. G-testi olasılık oranı "likelihood-ratio" veya en yüksek olabilirlik "maximum likelihood" testi olarak da isimlendirilir. G-testi, ki-kare bağımsızlık testinin kullanıldığı bütün iki yanlı tablolara uygulanabilir. Ki-kare bağımsızlık testinin uygulanabileceği tablolarda G-testinin daha yaygın olarak kullanılmasının sebeplerinden biri beklenen frekansların 1 ve/veya 5'ten küçük olması durumlarında hesaplanan G istatistiğinin ki-kare dağılımına daha uygun olması, diğer bir değişle G istatistiğinin ki-kare dağılımına uygunluğunun etkilenmemesidir.

Yürütülen bir çalışmada toplanan veriler ile iki yanlı tablo aşağıda verildiği gibi düzenlenmiş olsun. Bu şekilde düzenlenmiş bir iki yanlı tablo için G istatistiği (10.11) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

	A1	A2	Toplam
B1	a	b	a+b
B2	c	d	c+d
Toplam	a+c	b+d	N

$$G= a \ln a + b \ln b + c \ln c + d \ln d + N \ln N - (a+b) \ln (a+b) - (c+d) \ln (c+d) - (a+c) \ln (a+c) - (b+d) \ln (b+d) \quad \ldots(10.11)$$

(10.11) numaralı eşitlikte yapılan hesaplamalar aşağıdaki şekilde 3 adımda toplanır.

Adım 1: Her gözün frekansı için $\sum f \ln f$ değeri hesaplanır.

Adım 2: Satır ve sütun toplamları için $\sum f \ln f$ değeri hesaplanır.

Adım 3: Toplam frekans için N ln N değeri hesaplanır.

3 adımda belirtilen hesaplamalar yapıldıktan sonra G istatistiği (10.12) numaralı eşitilkte verildiği şekilde düzenlenebilir.

$$G = 2[\text{Adım } 1 - \text{Adım } 2 + \text{Adım } 3] \quad \ldots(10.12)$$

(10.11) veya (10.12) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanan G istatistiği serbestlik derecesi (satır sayısı–1)x(sütun sayısı–1) olan ki-kare dağılımına uygun bir dağılım gösterir.

ÖRNEK:

Yürütülen bir çalışmada, şehir ve köyde yaşayan 25 yaşındaki erkeklerin medeni durumlarına göre dağılımı Tablo 10.11'deki gibi gözlenmiştir. Yapılan çalışmada medeni durumun yaşanılan yerden bağımsız olup olmadığının araştırılması amaçlanmıştır.

Tablo 10.11. Şehir ve köyde yaşayan 25 yaşındaki erkeklerin medeni durumlarına göre dağılımı

	Evli	Bekar	Toplam
Şehir	350	700	1050
Köy	150	100	250
	500	800	1300

Medeni durumun yaşanılan yerden bağımsız olup olmadığı G-testi uygulanarak kontrol edilebilir. Bu durumda da ilk olarak hipotezlerin aşağıdaki gibi kurulması gerekir.

H_0: Medeni durum yaşanılan yerden bağımsızdır. Yani evli veya bekar oluş şehir veya köyde yaşamaktan bağımsızdır.

H_1: Medeni durum yaşanılan yere bağımlıdır. Yani evli veya bekar oluş şehir veya köyde yaşamaktan bağımsız değildir.

Hipotezler kurulduktan sonra G-istatistiğinin hesaplanması için Adım1-Adım 3'teki hesaplamalar yapılır.

Adım 1:350 ln 350+700 ln 700+150 ln 150+100 ln 100=7848.145
Adım 2: 1050 ln 1050 + 250 ln 250 + 500 ln 500 + 800 ln 800=17139.731
Adım 3: 1300 ln 1300=9321.155

Gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra G istatistiği (10.12) numaralı eşitlikten G= 2(7848.145-17139.731+9321.155)=59.138 olarak bulunur. Hesaplanan G istatistiği 1 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına uygun dağılım gösterir. Eğer araştırıcı I. tip hata olasılığını %1 olarak belirlemiş ise Tablo D'den 1 serbestlik dereceli ki-kare dağılımında %1'lik alanının 6.635 değerinden başladığı görülür. Hesaplanan G-değeri (59.138) bu değerden çok büyük olup, kontrol hipotezini ret bölgesine düşer. Bu sebeple kontrol hipotezi ret edilerek medeni durumun yaşanılan yere göre değiştiğine, yani evli veya bekar oluşun şehir veya köyde yaşamaktan bağımsız olmadığına karar verilir.

10.6. Sorular

1. Ki-kare (χ^2) dağılımı nasıl elde edilir? Açıklayınız.

2. Ki-kare (χ^2) dağılımının özellikleri nelerdir? Açıklayınız.

3. Bir mer'adaki bitki kompozisyonunun %55'ini ayrık, %40'ını baklagil türü ve geri kalanını da zararlı otlardan oluştuğu bilinmektedir. 3 yıl otlatmadan sonra, söz konusu mer'adan tesadüfen seçilen 200 bitkiden; 115'inin ayrık, 75'inin baklagil türü ve 10'unun da zararlı ot olduğu tespit edilmiştir. Bu sonuçlara göre 3 yıllık otlatma sonunda, mer'adaki bitki kompozisyonu oranları değişmiş midir?

4. 5 farklı bölümü tercih eden 25 öğrencinin cinsiyetlere göre dağılımları tespit edildikten sonra, bölüm tercihinin cinsiyetten bağımsız olup olmadığını araştırmak amacıyla hesaplanan χ^2 değeri 14.425 olarak bulunmuştur. Buna göre bölüm tercihinin cinsiyetten bağımsız olduğu söylenebilir mi?

5. Bir araştırmada 100 kişiye diş bakımına dikkat edip etmedikleri sorularak, cinsiyetlere göre aşağıdaki tablo hazırlanmıştır. Diş bakımına dikkat etme durumu cinsiyete bağımlı mıdır?

Cinsiyet	Bakımlı	Bakımsız
Erkek	35	20
Kadın	25	20

6. Bir ilaç firması tarafından yeni bir ürün için yapılan tanıtım kampanyası sonucunda 7 bölgede bulunan eczanelerden bu ürünü satın alanların sayısı aşağıdaki gibi bulunmuştur. Yeni ürünü satın alanların sayısının bölgelere göre homojen dağılıp dağılmadığını kontrol ediniz.

BÖLGELER	1	2	3	4	5	6	7
ECZANELER	30	50	65	40	20	70	25

7. Bir hafta boyunca kütüphaneden alınan kitapların günlere göre sayısı aşağıdaki gibidir. Ödünç kitap almak haftanın günlerinden bağımsız mıdır?

Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	Pazar
135	108	120	116	146	98	54

8. Dört ayrı bölgeden rastgele seçilen kişilere uygulanan test sonucu mide ülserinin en büyük nedeni olarak gösterilen Helicobacter pylori mikrobu taşıyıp taşımadıkları aşağıdaki gibi tespit edilmiştir. Helicobacter pylori mikrobu taşıyıp taşımama durumunun bölgelere bağlı olup olmadığını kontrol ediniz.

Bölgeler	A	B	C	D
Taşıyan	14	18	12	10
Taşımayan	36	32	48	90

9. Obezite hastası olan ve olmayan 200 bireyin cinsiyetlerine göre dağılımları aşağıdaki gibidir.

Cinsiyet	Obezite Var	Obezite Yok
Kız	25	75
Erkek	20	80

Obez olup olmamanın cinsiyetten bağımsız olduğu görüşüne katılır mısınız?

10. Migren hastası olan ve olmayan 200 bireyin cinsiyetlerine göre dağılımları aşağıdaki gibidir.

	Migren Var	Migren Yok
Kız	25	75
Erkek	20	80

Migren olup olmamanın cinsiyetten bağımsız olduğu görüşüne katılır mısınız?

11. Polen alerjisi olan ve olmayan bireylerin, yaş evrelerine göre dağılımı aşağıdaki gibidir. Polene karşı duyarlı olup olmamanın yaş evrelerinden bağımsız olduğu söylene bilir mi?

	Polen alerjisi var	Polen alerjisi yok
Çocuk	25	75
Genç	20	80
Yetişkin	15	65

12. Şehirde ve köyde yaşayan 20 yaşındaki erkeklerden evli ve bekar olanların sayıları aşağıdaki gibidir.

	Evli	Bekar
Şehir	407	726
Köy	266	220

Evli veya bekar oluş, şehirde veya köyde yaşamaktan bağımsız mıdır?

13. Trafik kazalarında yaralanan ve sağlam kalan sürücülerin, Emniyet kemeri kullanan ve kullanmayanlara göre dağılımı aşağıdaki gibidir. Trafik kazalarında yaralanmanın Emniyet kemeri kullanmaktan bağımsız olduğu söylenebilir mi? Eğer bağımsız değilse bağımlılık katsayısı (C.C) ne kadardır?

	Yaralı	Sağlam
E. kemeri var	407	726

E. kemeri yok	266	220

14. Test, yazılı ve sözlü sınav yöntemlerine tabi tutulan öğrencilerden başarılı ve başarısız olanların, sınav yöntemlerine göre dağılımı aşağıdaki gibidir.

	Test	Yazılı	Sözlü
Başarılı	50	47	56
Başarısız	5	14	8

Öğrencilerin başarılı olup olmamalarının, uygulanan sınav yönteminden bağımsız olduğu söylenebilir mi?

15. Belirli bir hastalığa karşı aşılanan ve aşılanmayan çocukların hastalığa tutulup tutulmama durumları aşağıdaki gibidir.

	Hasta olan	Hasta olmayan
Aşılanan	9	42
Aşılanmayan	17	22

Hasta olup olmama durumu aşı olup olmamaktan bağımsız mıdır?

16. Belirli bir bölgede meydana gelen Trafik kazaları sayısının mevsimlere göre dağılımı aşağıdaki gibidir.

İlkbahar	Yaz	Sonbahar	Kış
40	20	60	80

Bu bölgede meydana gelen Trafik kazası sayılarının mevsimlerden bağımsız olduğu söylenebilir mi?

17. Belirli bir bölgedeki bir yıl içerisinde Hırsızlık, Tecavüz ve Gasp suçlarını işleyenlerin yaş gruplarına göre dağılımları aşağıdaki gibidir.

Yaş grubu	Hırsızlık	Tecavüz	Gasp
20-30	25	55	20
31-40	35	25	15
41-50	40	10	10

Bu bölgede işlenen bu üç farklı suç türünün yaş gruplarından bağımsız olduğu söylenebilir mi? Eğer bağımsız değilse bağımlılık katsayısı (C.C) ne kadardır?

18. Bir bahçeden tesadüfen alınan 300 adet uzun sivri biberin yarısı acı yarısı ise tatlıdır. Tesadüfen alınan 400 adet kısa sivri biberin ise 3/4'ü acıdır. Sivri biberlerdeki acı ve tatlı oluşun uzun ve kısa oluştan bağımsız olduğu söylenebilir mi?

19. Öğretmen, avukat, mühendis ve doktor meslek gruplarını tercih edenlerin doğum yerlerine göre dağılımı aşağıdaki gibidir.

	Öğretmen	Avukat	Mühendis	Doktor
Köy	45	10	20	15
Kasaba	55	15	10	20
Şehir	15	55	45	10

Bu meslek gruplarını tercih etmek, doğum yerinden bağımsız mıdır? Eğer bağımsız değilse bağımlılık ne kadardır?