

Basit Rastgele Örnekleme

Kitle: Y_1, Y_2, \dots, Y_N

Örneklem: y_1, y_2, \dots, y_n

N : Kitle çapı

n : Örneklem çapı

$\binom{N}{n}$: Örneklem sayısı

Basit rastgele örneklem yönteminde her bir örneklemin seçilme şansı eşittir.

Kitle Ortalamasının Tahmin Edicisi

Y_1, Y_2, \dots, Y_N , N çaplı kitle ise kitle ortalaması

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i = \frac{1}{N} (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N)$$

olarak tanımlanır.

y_1, y_2, \dots, y_n , n çaplı örneklem ise örneklem ortalaması

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

olarak tanımlanır.

Örneklem ortalaması \bar{y} , kitle ortalaması \bar{Y} 'nin

- Yansız

bir tahmin edicisidir. Bir başka deyişle,

$$E(\bar{y}) = \bar{Y}$$

dır.

Kitle ortalaması \bar{Y} 'nin tahmin edicisi

$$\hat{\bar{Y}} = \bar{y}$$

olarak gösterilir.

Kitle Varyansı

Y_1, Y_2, \dots, Y_N , N çaplı bir kitle olsun. Kitle varyansı

$$\sigma^2 = E(Y - \bar{Y})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2$$

yada

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2$$

olarak tanımlanır.

Örneklem Varyansı

y_1, y_2, \dots, y_n , n çaplı bir örneklem olsun. Örneklem varyansı

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

olarak tanımlanır.

Örneklem varyansı s^2 kitle varyansının

- Yansız

bir tahmin edicisidir.

Bir başka deyişle, yerine koyarak örnekleme yapıldığında

$$E(s^2) = \sigma^2$$

Yerine koymaksızın örnekleme yapıldığında

$$E(s^2) = S^2$$

olur.

Not: Örneklem seçimi

- Yerine koyarak ve
- Yerine koymaksızın

olarak ikiye ayrılabilir.

Örneklem Ortalaması \bar{y} 'nin Varyansı

\bar{y} 'nin varyansı

$$V(\bar{y}) = E(\bar{y} - E(\bar{y}))^2 = E(\bar{y} - \bar{Y})^2$$

olarak tanımlanır.

Yerine koymaksızın örnekleme için \bar{y} 'nin varyansı

$$V(\bar{y}) = \frac{N - n}{N - 1} \frac{\sigma^2}{n}$$

yada

$$V(\bar{y}) = \frac{N - n}{N} \frac{S^2}{n}$$

olarak tanımlanır.

Yerine koyarak örnekleme için \bar{y} 'nin varyansı

$$V(\bar{y}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

yada

$$V(\bar{y}) = \frac{N - 1}{N} \frac{S^2}{n}$$

olarak tanımlanır.

Örneklem Ortalaması \bar{y} 'nin Varyansının Tahmin Edicisi

Örneklem ortalaması \bar{y} 'nin varyansının tahmin edicisi $\hat{\sigma}_{\bar{y}}^2$ bulunurken kitle varsansı S^2 yerine örneklem varyansı s^2 kullanılır. Bu nedenle,

Yerine koymaksızın örnekleme için

$$\hat{V}(\bar{y}) = \frac{N - n}{N} \frac{s^2}{n}$$

yerine koyarak örnekleme için

$$\hat{V}(\bar{y}) = \frac{N - 1}{N} \frac{s^2}{n}$$

olarak bulunur.

Kitle Ortalaması \bar{Y} için Güven Aralığı

y_1, y_2, \dots, y_n , n çaplı örneklem olsun. Kitle ortalaması \bar{X} 'nin $\%(1-\alpha)100$ güven aralığı

$$\bar{y} - z_{\alpha/2} s_{\bar{y}} < \bar{Y} < \bar{y} + z_{\alpha/2} s_{\bar{y}}$$

şeklinde ifade edilir.

Burada,

\bar{y} : Örneklem ortalaması
 $s_{\bar{y}}$: Örneklem ortalaması \bar{y} 'nin standart hatası ve
 $z_{\alpha/2}$: Standart normal dağılımın tablo değeri

olarak tanımlanır.

Kitle Toplamının Tahmin Edicisi

Y_1, Y_2, \dots, Y_N , N çaplı kitle olsun. Kitle toplamı:

$$Y = \sum_{i=1}^N Y_i = N\bar{Y}$$

şeklinde ifade edilir. Yukarıda, kitle ortalamasının tahmin edicisi:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

olarak tanımlanmıştı bu nedenle kitle toplamının tahmin edicisi

$$\hat{Y} = N\bar{y}$$

olarak ifade edilir.

Kitle toplamının tahmin edicisi \hat{Y} , kitle toplamı Y 'in yansız bir tahmin edicisidir. Bir başka deyişle,

$$E(\hat{Y}) = Y$$

dır.

Kitle Toplamının Tahmin Edicisi \hat{Y} 'nin Varyansı

Kitle toplamının tahmin edicisi \hat{Y} 'nin varyansı

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}) &= V(N\bar{y}) \\ &= N^2 V(\bar{y}) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Buradan

Yerine koymaksızın örnekleme için:

$$V(\hat{Y}) = \frac{N-n}{N} N^2 \frac{S^2}{n}$$

Yerine koyarak örnekleme için:

$$V(\hat{Y}) = \frac{N-1}{N} N^2 \frac{S^2}{n} \cong N^2 \frac{S^2}{n}$$

olarak elde edilir.

Kitle Toplamının Tahmin Edicisi \hat{Y} 'nin Varyansının Tahmin Edicisi

Kitle varyansı S^2 yerine, onun tahmin edicisi olan örneklem varyansı s^2 kullanılarak aşağıda verilen eşitlikler elde edilir.

Yerine koymaksızın örnekleme için

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{N-n}{N} N^2 \frac{s^2}{n}$$

yerine koyarak örnekleme için

$$\hat{V}(\hat{Y}) = N^2 \frac{s^2}{n}$$

dır. Örneklem varyansı s^2 kullanılarak elde edilen eşitlikler, $V(\hat{Y})$ 'nin yansız tahmin edicilerini verir. Bir başka deyişle,

$$E[\hat{V}(\hat{Y})] = V(\hat{Y})$$

olduğu görülür.

Kitle Toplamı Y için Güven Aralığı

y_1, y_2, \dots, y_n , n çaplı örneklem olsun. Kitle toplamı Y için $\%(1-\alpha)100$ güven aralığı

$$\hat{Y} - z_{\alpha/2} s_{\hat{Y}} < Y < \hat{Y} + z_{\alpha/2} s_{\hat{Y}}$$

şeklinde ifade edilir.

Burada,

\hat{Y} : Kitle toplamının tahmini

$s_{\hat{Y}}$: Kitle toplamının tahmin edicisinin standart hatası ve

$z_{\alpha/2}$: Standart normal dağılımın tablo değeri
olarak tanımlanır.