Kitle Oranı P

$Y_1, Y_2, \dots, Y_N$, N çaplı kitle olsun. Kitle oranı

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{N}$$

şeklinde ifade edilir.

Burada, Y_i i-inci rastgele değişkenin belli bir özelliğe sahip olup olmadığına göre 0 veya 1 değerini alır.

Örneklem Oranı p

$y_1, y_2, \dots, y_n$, n çaplı örneklem olsun. Örneklem oranı

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

şeklinde ifade edilir.

Burada, y_i i-inci birimin belli bir özelliğe sahip olup olmadığına göre 0 veya 1 değerini alır.

Örneklem oranı p, kitle oranı P'nin

- Yansız

bir tahmin edicisidir. Bir başka deyişle,

$$E(p) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right]$$

$$= P$$

şeklinde ifade edilir.

Kitle oranı P'nin tahmin edicisi

$$\hat{P} = p$$

ile gösterilir.

Kitle Varyansı

$Y_1, Y_2, \dots, Y_N$, N çaplı kitle olsun. Kitle oranı

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{N}$$

olarak tanımlanır.

Buradan Y_i'nin varyansı

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \overline{Y})^2$$

$$= \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 - N\overline{Y}^2\right]$$

şeklinde ifade edilir.

Y_i=0 yada 1 değerlerini aldığı için

$$\sum_{i=1}^{N} Y_i = \sum_{i=1}^{N} {Y_i}^2 = NP$$

ve

$$\overline{Y}^2 = P^2$$

olur.

Dolayısıyla,

$$S^2 = \frac{1}{N-1}(NP - NP^2) = \frac{N}{N-1}P(1-P) = \frac{N}{N-1}PQ$$

şeklinde ifade edilir. Burada Q=1-P dir.

Örneklem Varyansı

$y_1, y_2, \ldots, y_n$, *n* çaplı örneklem olsun.Örneklem oranı,

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

olarak tanımlanır. Buradan, y_i'nin varyansı

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{y}^2\right]$$

şeklinde ifade edilir.

Y_i=0 yada 1 değerlerini aldığı için

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 = np$$

ve

$$\overline{y}^2 = p^2$$

olur.

Buradan,

$$s^2 = \frac{1}{n-1}(np - np^2) = \frac{n}{n-1}p(1-p) = \frac{n}{n-1}pq$$

şeklinde ifade edilir. Burada q=1-p dir.

Örneklem Oranının Varyansı

Y_i'nin varyansı kullanılarak örneklem oranı p'nin varyansı

$$V(p) = E\big(p - E(p)\big)^2$$
$$= E(p - P)^2$$

şeklinde ifade edilir. Örneklem oranının

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \overline{y}$$

ve örneklem ortalamasının varyansı tanımı kullanılarak

Yerine koymaksızın örnekleme için

$$V(\overline{y}) = E\big(\overline{y} - \overline{Y}\big)^2$$
$$= \frac{N-n}{N}\frac{S^2}{n}$$
$$= V(p)$$

Yerine koyarak örnekleme için

$$V(\overline{y}) = E\big(\overline{y} - \overline{Y}\big)^2$$
$$= \frac{S^2}{n}$$
$$= V(p)$$

olarak tanımlanmıştı.

V(p)'de S^2 gördüğümüz yere

$$S^2 = \frac{N}{N-1}PQ$$

yazarsak:

Yerine koymaksızın örnekleme için

$$V(p) = \frac{N-n}{N-1}\frac{PQ}{n}$$

Yerine koyarak örnekleme için

$$V(p) = \frac{PQ}{n}$$

olur.

Örneklem Oranının Varyansının Tahmin Edicisi

$Y_1, Y_2, \dots, Y_N$, *N* çaplı kitle ve $y_1, y_2, \dots, y_n$, *n* çaplı örneklem olsun. Burada,

$$s^2 = \frac{n}{n-1}pq \text{ , } S^2 = \frac{N}{N-1}PQ\text{'nun}$$

yansız tahmin edicisidir.

Bu nedenle örneklem oranının varyansının tahmin edicisi

Yerine koymaksızın örnekleme için

$$\hat{V}(p) = \frac{N-n}{N}\frac{pq}{n-1}$$

Yerine koyarak örnekleme için

$$\hat{V}(p) = \frac{pq}{n-1}$$

olur. Dolayısıyla, $\hat{V}(p)$, $V(p)$'nin yansız tahmin edicisi bir başka deyişle

$$E(\hat{V}(p)) = V(p)$$

olur.

Kitle Oranı *P* için Güven Aralığı

$y_1, y_2, \dots, y_n$, *n* çaplı örneklem olsun. Kitle oranı *P* için %(1-α)100 güven aralığı

$$p - z_{\alpha/2}\, s_p < P < p + z_{\alpha/2}\, s_p$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

p: Örneklem oranı

s_p : p'nin standart hatası ve

$z\alpha/_2$: Standart normal dağılımın tablo değeri

olarak tanımlanır.