

Basit Rastgele Örnekleme

Aşağıdaki veri setini kullanarak önceki bölümlerde anlatılan parametrelerin tahmin değerlerini elde ediniz.

10, 16, 13, 24, 21, 11, 23, 18

Burada $N=8$ dir.

- Kitle toplamı:

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{i=1}^N Y_i \\ &= 10 + 16 + 13 + 24 + 21 + 11 + 23 + 18 \\ &= 136 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

- Kitle ortalaması

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \\ &= \frac{1}{8} (10 + 16 + 13 + 24 + 21 + 11 + 23 + 18) \\ &= \frac{1}{8} (136) \\ &= 17 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

- Kitle varyansı

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2 \\ &= \frac{1}{7} [(10 - 17)^2 + (16 - 17)^2 + \dots + (18 - 17)^2] \\ &= \frac{1}{7} (204) \\ &= 29.14 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

- Bu kitleden rastgele sayılar tablosu kullanılarak n=4 çaplı örneklemin aşağıdaki gibi çekildiğini varsayalım

$$y_1 = 24$$

$$y_2 = 13$$

$$y_3 = 18$$

$$y_4 = 21$$

- Örnekleme ortalaması

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \\ &= \frac{1}{4} (24 + 13 + 18 + 21) \\ &= \frac{1}{4} (76) \\ &= 19\end{aligned}$$

olarak bulunur.

- Örnekleme varyansı

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \\ &= \frac{1}{3} [(24 - 19)^2 + (13 - 19)^2 + (18 - 19)^2 + (21 - 19)^2] \\ &= \frac{1}{3} (66) \\ &= 22\end{aligned}$$

olarak bulunur.

- Örnekleme ortalaması \bar{y} 'nin varyansı (Yerine koymaksızın örnekleme yapıldığında)

$$\begin{aligned}V(\bar{y}) &= \frac{N-n}{N} \frac{S^2}{n} \\ &= \frac{(8-4)}{8} \frac{29.14}{8} \\ &= 1.82\end{aligned}$$

olarak bulunur.

- Örneklem ortalaması \bar{y} 'nin varyansının tahmini (Yerine koymaksızın örnekleme yapıldığında)

$$\begin{aligned}\hat{V}(\bar{y}) &= \frac{N-n}{N} \frac{s^2}{n} \\ &= \frac{(8-4)}{8} \frac{22}{8} \\ &= 1.375\end{aligned}$$

olarak bulunur.

- Kitle ortalaması \bar{Y} 'nin %95'lik güven aralığı

$$19 - (1.96)(1.17) < \bar{Y} < 19 + (1.96)(1.17)$$

$$16.706 < \bar{Y} < 21.293$$

şeklinde ifade edilir. Burada, örneklem ortalaması \bar{y} 'nin standart hatası

$$s_{\bar{y}} = \sqrt{1.375} = 1.17$$

dır.

- Kitle toplamının tahmini

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= N\bar{y} \\ &= 8(19) \\ &= 152\end{aligned}$$

olarak bulunur.

- Kitle toplamının tahmin edicisi \hat{Y} 'nin varyansı

$$\begin{aligned}V(\hat{Y}) &= V(N\bar{y}) \\ &= N^2 V(\bar{y}) \\ &= 8^2 (1.82) \\ &= 116.48\end{aligned}$$

olarak bulunur.

- Kitle toplamının tahmin edicisi \hat{Y} 'nin varyansının tahmini

$$\begin{aligned}\hat{V}(\hat{Y}) &= N^2 \frac{N-n}{N} \frac{s^2}{n} \\ &= 8^2 \frac{(8-4)}{8} \frac{22}{8} \\ &= 88\end{aligned}$$

olarak bulunur.

- Kitle toplamının tahmin edicisinin standart hatası

$$s_{\hat{Y}} = \sqrt{88} = 9.38$$

olarak bulunur.

- Kitle toplamı Y 'in %95'lik güven aralığı

$$152 - (1.96)(9.38) < Y < 152 + (1.96)(9.38)$$

$$133.61 < Y < 170.38$$

olarak bulunur.

Y rastgele değişkeninin belli bir özelliğe sahip olup olmadığına göre 0 veya 1 değerini aldığını varsayalım. Aşağıdaki veri setini kullanarak önceki bölümlerde anlatılan parametrelerin tahmin değerlerini elde ediniz.

$$1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0$$

Burada $N=8$ dir.

- Kitle toplamı:

$$\begin{aligned}Y &= \sum_{i=1}^N Y_i \\ &= 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 \\ &= 4\end{aligned}$$

olarak bulunur.

- Kitle oranı

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sum_{i=1}^N Y_i}{N} \\ &= \frac{4}{8} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

- Bu kitleden rastgele sayılar tablosu kullanılarak n=4 çaplı örneklemin aşağıdaki gibi çekildiğini varsayalım

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = 1$$

$$y_3 = 0$$

$$y_4 = 0$$

- Örneklem oranı

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \\ &= \frac{2}{4} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

- Kitle Varyansı

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{N}{N-1} PQ \\ &= \frac{8}{7} (0.5)(0.5) \\ &= 0.28 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

- Örneklem Varyansı

$$s^2 = \frac{n}{n-1} pq$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{3}(0.5)(0.5) \\ &= 0.33 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

- Örneklem oranının varyansı

$$\begin{aligned} V(p) &= \frac{N-n}{N-1} \frac{PQ}{n} \\ &= \frac{4}{7} \frac{(0.5)(0.5)}{4} \\ &= 0.035 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

- Örneklem oranının varyansının tahmini

$$\begin{aligned} \hat{V}(p) &= \frac{N-n}{N} \frac{pq}{n-1} \\ &= \frac{4}{8} \frac{(0.5)(0.5)}{3} \\ &= 0.041 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

- Kitle oranı P için %95'lik güven aralığı

$$\begin{aligned} 0.5 - (1.96)(0.202) &< P < 0.5 + (1.96)(0.202) \\ 0.11 &< P < 0.89 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Burada, örneklem oranı p 'nin standart hatası

$$s_p = \sqrt{\hat{V}(p)} = \sqrt{0.041} = 0.202$$

dir.