

## Kitle Ortalamasının Tahmin Edicisinin Varyansı

$Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ ,  $N$  çaplı bir kitle olsun.

Kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansı

$$V(\bar{y}_{tb}) = E(\bar{y}_{tb} - E(\bar{y}_{tb}))^2$$

yada

$$V(\bar{y}_{tb}) = E(\bar{y}_{tb} - \bar{Y})^2$$

olarak ifade edilir.

**Not:**  $E(\bar{y}_{tb}) = \bar{Y}$  dir.

$N = \sum_{h=1}^L N_h$  çaplı bir kitleden,  $n = \sum_{h=1}^L n_h$  çaplı bir örneklem

$$\prod_{h=1}^L \binom{N_h}{n_h}$$

kadar değişik şekilde seçilebilir.

Dolayısıyla, her bir örneklemin seçilme olasılığı

$$\frac{1}{\prod_{h=1}^L \binom{N_h}{n_h}}$$

olarak bulunur.

Kitle ortalamasının tahmin edicisi

$$\bar{y}_{tb} = \frac{\hat{Y}_{tb}}{N} = \frac{\sum_{h=1}^L N_h \bar{y}_h}{N}$$

olarak ifade edilir. Burada,

$\frac{N_h}{N}$ : Tabaka ağırlığı

olarak tanımlanır.

Bu nedenle,

$$\bar{y}_{tb} = \frac{N_1}{N} \bar{y}_1 + \dots + \frac{N_L}{N} \bar{y}_L$$

olarak ta yazılabilir.

Kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansı

$$\begin{aligned} V(\bar{y}_{tb}) &= V\left(\frac{N_1}{N}\bar{y}_1 + \dots + \frac{N_L}{N}\bar{y}_L\right) \\ &= \left(\frac{N_1}{N}\right)^2 V(\bar{y}_1) + \dots + \left(\frac{N_L}{N}\right)^2 V(\bar{y}_L) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

h. tabaka ortalamasının tahmin edicisinin varyansı;

$$V(\bar{y}_h) = \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_h^2}{n_h}$$

olarak ifade edildiğinden kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansı

$$\begin{aligned} V(\bar{y}_{tb}) &= \left(\frac{N_1}{N}\right)^2 \frac{N_1 - n_1}{N_1} \frac{S_1^2}{n_1} + \dots + \left(\frac{N_L}{N}\right)^2 \frac{N_L - n_L}{N_L} \frac{S_L^2}{n_L} \\ &= \sum_{h=1}^L \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_h^2}{n_h} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_h^2}{n_h} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

### **Kitle Ortalamasının Tahmin Edicisinin Varyansının Tahmin Edicisi**

Tabakalı rastgele örneklemede kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansının tahmin edicisi  $\hat{V}(\bar{y}_{tb})$ , h. tabaka varyansı  $S_h^2$ 'nin yerine h. tabakanın örneklem varyansı olan  $s_h^2$  kullanılarak bulunur.

$N_h$  çaplı bir tabakadan,  $n_h$  çaplı bir örneklem seçildiğine h. tabakanın örneklem varyansı

$$s_h^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (Y_{hi} - \bar{y}_h)^2$$

olarak elde edilir.

h. tabakanın örneklem varyansının tahmin edicisi  $s_h^2$ , h. tabakanın varyansı için yansız bir tahmin edicidir. Bir başka deyişle,

$$E(s_h^2) = S_h^2$$

olarak ifade edilir. Buradan,

$$\hat{V}(\bar{y}_{tb}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_h^2}{n_h}$$

olarak elde edilir.

Kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansının tahmin edicisi  $\hat{V}(\bar{y}_{tb})$ , kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansı  $V(\bar{y}_{tb})$  için yansız bir tahmin edicidir.

Bir başka deyişle,

$$E(\hat{V}(\bar{y}_{tb})) = V(\bar{y}_{tb})$$

olarak ifade edilir.

### **Kitle Toplamının Tahmin Edicisinin Varyansı**

Kitle toplamı Y'in tahmin edicisi

$$\hat{Y}_{tb} = N\bar{y}_{tb}$$

olarak ifade edilir. Buradan, kitle toplamı Y'nin tahmin edicisinin varyansı

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_{tb}) &= V(N\bar{y}_{tb}) \\ &= N^2 V(\bar{y}_{tb}) \\ &= N^2 \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_h^2}{n_h} \\ &= \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_h^2}{n_h} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Tabakalı rastgele örneklemede, kitle toplamının tahmin edicisinin varyansının tahmin edicisi  $\hat{V}(\hat{Y}_{tb})$ , h. tabaka varyansı  $S_h^2$ 'nin yerine h. tabakanın örnekleme varyansı olan  $s_h^2$  kullanılarak bulunur.

Bir başka deyişle,

$$\begin{aligned} \hat{V}(\hat{Y}_{tb}) &= \hat{V}(N\bar{y}_{tb}) \\ &= N^2 \hat{V}(\bar{y}_{tb}) \end{aligned}$$

$$= N^2 \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{s_h^2}{n_h}$$

$$= \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{s_h^2}{n_h}$$

olur.

Burada, h. tabakanın örneklem varyansı

$$s_h^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (Y_{hi} - \bar{y}_h)^2$$

şeklinde hesaplanır.

Kitle toplamının tahmin edicisinin varyansının tahmin edicisi  $\hat{V}(\hat{Y}_{tb})$ , kitle toplamının tahmin edicisinin varyansı  $V(\hat{Y}_{tb})$  için yansız bir tahmin edicidir.

Bir başka deyişle,

$$E(\hat{V}(\hat{Y}_{tb})) = V(\hat{Y}_{tb})$$

olarak ifade edilir.

## Tabakalı Rastgele Örneklemede Örneğin Paylaştırılması

Tabakalı rastgele örneklemede öncelikle

- Tabakalardan seçilecek olan örneklem çapları  $n_h$  belirlenmelidir.

**Amaç:** Minimum maliyet ile maksimum duyarlılığı elde etmektir.

### Örneğin Paylaştırılmasında Kullanılan Temel Kriterler

- Varyans
- Tabaka çapları
- Maliyet

### Örnekleme Maliyeti

Maliyet fonksiyonu,

$$c = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h n_h$$

olarak tanımlanır.

Burada,

$c$  : Toplam maliyeti

$c_0$ : Sabit maliyeti

$c_h$ : h. tabakadaki birim başına düşen maliyeti,

$n_h$  : h. tabakadaki örneklem çapını

gösterir.