# Tabakalı Rastgele Örneklemede Örneğin Paylaştırılması

Bu bölümde tabakalı rastgele örneklemede örneğin paylaştırılması için kullanılan yöntemler detaylı olarak anlatılacaktır.

**Eşit Paylaştırma**

Eşit paylaştırma yöntemi

- Tabaka çaplarının
- Tabaka varyanslarının ve
- Herbir tabakada birim başına örnekleme maliyetlerinin

birbirine yakın olduğu durumlarda kullanılır.

Tabaka çapları $N_1, N_2, \dots, N_L$ olan tabakaların her birinden eşit sayıda örnekleme birimi seçilir. Bir başka deyişle, her bir tabakadan $n_1 = n_2 = \cdots = n_L$ olacak şekilde örneklemler seçilir.

Herbir tabaka için örneklem çapları

$$n_h = \frac{n}{L}$$

eşitliğinden yararlanarak bulunur.

Burada,

L: Tabaka sayısını

gösterir.

**Kitle Ortalamasının Tahmin Edicisi**

$$\overline{y}_{eş} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \overline{y}_h}{N}$$

olarak bulunur.

**Kitle Ortalamasının Tahmin Edicisinin Varyansı**

$$V\left(\overline{y}_{tb}\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h}\frac{S_h^2}{n_h}$$

olarak ifade edildiğinden bu eşitlikte $n_h = \frac{n}{L}$ yazılırsa kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansı

$$V\left(\overline{y}_{eş}\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{N_h - \frac{n}{L}}{N_h}\frac{S_h^2}{\frac{n}{L}}$$

$$= \frac{L}{nN^2}\sum_{h=1}^{L} N_h^2 S_h^2 - \frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L} N_h S_h^2$$

olarak bulunur.

Kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansının tahmin edicisi $\hat{V}\left(\overline{y}_{eş}\right)$ bulunurken tabaka varyansı $S_h^2$'nin yerine onun tahmin edicisi olan $s_h^2$ kullanılır. Buradan,

$$\hat{V}\left(\overline{y}_{eş}\right) = \frac{L}{nN^2}\sum_{h=1}^{L} N_h^2 s_h^2 - \frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L} N_h s_h^2$$

elde edilir.

**Kitle Toplamının Tahmin Edicisinin Varyansı**

Kitle toplamı Y'in tahmin edicisi

$$\hat{Y}_{eş} = N\overline{y}_{eş}$$

olarak ifade edilir. Buradan,

$$V(\hat{Y}_{eş}) = V\left(N\overline{y}_{eş}\right)$$

$$= N^2 V\left(\overline{y}_{eş}\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{N_h - \frac{n}{L}}{N_h} \frac{S_h^2}{\frac{n}{L}}$$

$$= \frac{L}{n}\sum_{h=1}^{L} N_h^2 S_h^2 - \sum_{h=1}^{L} N_h S_h^2$$

olarak elde edilir.

**Kitle Toplamının Tahmin Edicisinin Varyansının Tahmin Edicisi**

Kitle toplamının tahmin edicisinin varyansının tahmin edicisi $\hat{V}(\hat{Y}_{eş})$, tabaka varyansı $S_h^2$'nin yerine onun tahmin edicisi olan $s_h^2$ kullanılarak bulunmaktadır. Buradan,

$$\hat{V}(\hat{Y}_{eş}) = \hat{V}\left(N\overline{y}_{eş}\right)$$

$$= N^2 \hat{V}\left(\overline{y}_{eş}\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{N_h - \frac{n}{L}}{N_h} \frac{s_h^2}{\frac{n}{L}}$$

$$= \frac{L}{n} \sum_{h=1}^{L} N_h^2 s_h^2 - \sum_{h=1}^{L} N_h s_h^2$$

olarak bulunur.

### Orantılı Paylaştırma

- Uygulamada oldukça sık kullanılır.
- $n$ birimlik örnek $N_1, N_2, \ldots, N_L$ tabaka çaplarıyla orantılı bir şekilde paylaştırılır.
- Tabaka varyanslarının birbirine yakın değerler aldığı durumlarda kullanılır.

Örneği paylaştırırken her bir tabaka için örneklem çapları

$$n_h = \frac{N_h}{N} n$$

eşitliğinden yararlanarak bulunur. Burada,

$n_h$: h. tabaka için örneklem çapını

$N_h$**:** h. tabaka çapını

gösterir.

### Kitle Ortalamasının Tahmini

$$\overline{y}_{tb} = \frac{\hat{Y}_{tb}}{N} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \overline{y}_h}{\sum_{h=1}^{L} N_h}$$

olarak ifade edilir. Burada, $N_h = \frac{N}{n} n_h$ eşitliği kullanılarak

$$\overline{y}_{tb} = \frac{\sum_{h=1}^{L} \frac{N}{n} n_h \, \overline{y}_h}{\sum_{h=1}^{L} \frac{N}{n} n_h}$$

$$= \frac{\sum_{h=1}^{L} n_h \, \overline{y}_h}{n}$$

$$= \frac{\sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}}{n}$$

elde edilir.

Buradan kitle ortalamasının tahmini

$$\overline{y}_{or} = \frac{\sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}}{n}$$

olarak ifade edilir.

**Kitle Ortalamasının Tahmin Edicisinin Varyansı**

$$V(\overline{y}_{tb}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_h^2}{n_h}$$

olarak tanımlanır.

Orantılı paylaştırma için kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansı $n_h = \frac{N_h}{N} n$ eşitliği kullanılarak

$$V(\overline{y}_{or}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{N_h - \frac{N_h}{N} n}{N_h} \frac{S_h^2}{\frac{N_h}{N} n}$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{N_h \left(1 - \frac{n}{N}\right)}{N_h} \frac{N S_h^2}{N_h n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{S_h^2}{N_h n}$$

$$= \frac{N - n}{N} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} \frac{S_h^2}{n}$$

şeklinde elde edilir.

Orantılı paylaştırmada kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansının tahmin edicisi $\hat{V}(\overline{y}_{or})$ tabaka varyansı $S_h^2$'nin yerine onun tahmin edicisi olan $s_h^2$ kullanılarak bulunur. Yani,

$$\hat{V}(\overline{y}_{or}) = \frac{N - n}{N} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} \frac{s_h^2}{n}$$

olarak elde edilir.

**Kitle Toplamının Tahmin Edicisinin Varyansı**

Kitle toplamı Y'in tahmin edicisi

$$\hat{Y}_{or} = N\overline{y}_{or}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_{or}) &= V(N\overline{y}_{or}) \\ &= N^2 V(\overline{y}_{or}) \\ &= N^2 \frac{N-n}{N} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} \frac{S_h^2}{n} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

**Kitle Toplamının Tahmin Edicisinin Varyansının Tahmin Edicisi**

Orantılı paylaştırmada kitle toplamının tahmin edicisinin varyansının tahmin edicisi $\hat{V}(\hat{Y}_{or})$, tabaka varyansı $S_h^2$'nin yerine onun tahmin edicisi olan $s_h^2$ kullanılarak bulunur. Bir başka deyişle,

$$\begin{aligned} \hat{V}(\hat{Y}_{or}) &= \hat{V}(N\overline{y}_{or}) \\ &= N^2 \hat{V}(\overline{y}_{or}) \\ &= N^2 \frac{N-n}{N} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} \frac{s_h^2}{n} \end{aligned}$$

olarak bulunur.