

Sistematik örneklemede kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansı

$$V(\bar{y}_{sis}) = \frac{N-1}{N} S^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu eşitlikte,

$$\text{İlk kısım: } \frac{N-1}{N} S^2 \quad (\text{Kitle varyansı})$$

$$\text{İkinci kısım: } \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 \quad (\text{Örneklem içi değişim})$$

olarak tanımlanır.

- İkinci kısmın (örneklem içi değişim) artması halinde kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansının  $V(\bar{y}_{sis})$  azalacağı görülebilir. Çünkü örneklem içi varyansın büyük olması örneklemin heterojen bir yapıya sahip olduğunu gösterir.
- Sistemik örneklemin homojenlik derecesi

$$\text{Korelasyon katsayısı: } \rho = \frac{E(Y_{ij} - \bar{Y})(Y_{ij'} - \bar{Y})}{E(Y_{ij} - \bar{Y})^2}$$

yardımıyla belirlenir. Korelasyon katsayısı gerekli işlemler yapıldığında

$$\rho = \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j < j'}^n (Y_{ij} - \bar{Y})(Y_{ij'} - \bar{Y}) \frac{1}{N-1} \frac{1}{S^2}$$

olarak elde edilir.

Kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansının  $V(\bar{y}_{sis})$  korelasyon katsayısı  $\rho$  cinsinden ifadesi

$$V(\bar{y}_{sis}) = \frac{N-1}{N} \frac{S^2}{n} [1 + (n-1)\rho]$$

şeklindedir. Bu eşitlikten,

$\rho > 0$  ise örneklem içi birimlerin homojen

$\rho < 0$  ise örneklem içi birimlerin heterojen

olduğu görülür. Bir başka deyişle,

$$\rho > 0 \text{ ise } V(\bar{y}_{sis}) > V(\bar{y}_{brö})$$

$$\rho < 0 \text{ ise } V(\bar{y}_{sis}) < V(\bar{y}_{brö})$$

olarak ifade edilir. Açıtırki,  $\rho=0$  olduğunda  $V(\bar{y}_{sis})=V(\bar{y}_{brö})$  dir.

### **Rastgele Olarak Sıralanmış Kitle**

$Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ ,  $N$  çaplı kitle olsun.

Kitledeki birimler rastgele bir şekilde sıralanıyor ise  $V(\bar{y}_{sis}) \cong V(\bar{y}_{brö})$  dir.

### **Sıralanmış Kitle**

$Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ ,  $N$  çaplı kitle olsun.

Kitledeki birimler büyüklüklerine göre sıralanıyor ise  $V(\bar{y}_{sis}) < V(\bar{y}_{brö})$  dir.

### **Periyodik Değişimli Kitle**

$Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ ,  $N$  çaplı kitle olsun.

Kitledeki birimler belli aralıklarla tekrarlanıyor ise  $V(\bar{y}_{sis}) > V(\bar{y}_{brö})$  dir.

### **Kitle Toplamının Tahmin Edicisinin Varyansı**

Kitle toplamının tahmin edicisi  $\hat{Y}_{sis}$ 'nin varyansı

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_{sis}) &= E(\hat{Y}_{sis} - Y)^2 \\ &= E(N\bar{y}_{sis} - N\bar{Y})^2 \\ &= N^2 E(\bar{y}_{sis} - \bar{Y})^2 \\ &= N^2 V(\bar{y}_{sis}) \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

Buradan,

$$V(\hat{Y}_{sis}) = N(N-1)S^2 - N \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$$

olarak bulunur.

Ayrıca, kitle toplamının tahmin edicisi  $\hat{Y}_{sis}$ 'nin varyansı  $\rho$  cinsinden

$$V(\hat{Y}_{sis}) = N^2 \frac{N-1}{N} \frac{S^2}{n} [1 + (n-1)\rho]$$

şeklinde ifade edilir.

Aşağıda verilen kitle için ( N=15)

80	75	60	42	94	16	28	36	8	54	76	88	92	22	34
----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	----	----	----	----	----

Metot A ile “3’te 1” yapısına göre

- Örnekleme seçiniz
- Kitle ortalaması ve kitle toplamını tahmin ediniz.

a) Burada,

N=15 ve

k=3 olarak ifade edilir.

Sistemik örnekleme birim sayısı  $n = \frac{N}{k} = \frac{15}{3} = 5$  olarak bulunur.

**Adım 1:** Başlangıç biriminin ilk üç birim arasından rastgele olarak seçilen  $Y_2$  olduğunu varsayalım.

**Adım 2:**  $Y_2 = 75$  ile başladıktan sonra, 3 birim aralıkla ilerleyerek

$$Y_5 = 94,$$

$$Y_8 = 36,$$

$$Y_{11} = 76,$$

$$Y_{14} = 22$$

birimleri örnekleme dahil edilir.

b) Kitle ortalaması ve kitle toplamının tahmini sırasıyla

$$\bar{y}_{sis} = \frac{75 + 94 + 36 + 76 + 22}{5} = 60,6$$

ve

$$\hat{Y}_{sis} = N\bar{y}_{sis} = 15(60,6) = 909$$

olarak bulunur.

Aynı kitle için Metot B ile “3’te 1” yapısına göre

- Örnekleme seçiniz
- Kitle ortalaması ve kitle toplamını tahmin ediniz.

a) Burada,

$N=15$  ve

$k=3$  olarak ifade edilir.

Sistemantik örneklemdaki birim sayısı  $n = \frac{15}{3} = 5$  dir.

**Adım 1:**  $N=15$  olan kitleden rastgele olarak seçilen birim  $j=7$  olsun.

**Adım 2:** Kalan terim  $r$

$$\frac{j}{k} = \frac{7}{3} = 1(r)$$

olur.

**Adım 3:** Adım 2 de belirlenen  $r=1$  başlangıç birimi olarak alınır.

**Adım 4:**  $Y_1 = 80$  ile başladıktan sonra 3 birim aralıkla ilerleyerek

$$Y_4 = 42,$$

$$Y_7 = 28,$$

$$Y_{10} = 54,$$

$$Y_{13} = 92$$

birimleri örnekleme dahil edilir.

b) Kitle ortalaması ve kitle toplamının tahmini sırasıyla

$$\bar{y}_{sis} = \frac{80 + 42 + 28 + 54 + 92}{5} = 59,2$$

ve

$$\hat{Y}_{sis} = N\bar{y}_{sis} = 15(59,2) = 888$$

olarak bulunur.

**Örnek:** Aynı kitle için Metot A ve Metot B yöntemlerini kullanarak oluşturulabilecek sistemantik örneklemler aşağıda verilmiştir.

1. Örneklem	2. Örneklem	3. Örneklem
80	75	60
42	94	16
28	36	8
54	76	88
92	22	34

Metot A ile “3’te 1” yapısına göre  $N=nk$  olduğu durumda kitle ortalamasının tahmin edicisinin  $\bar{y}_{sis}$ , kitle ortalaması  $\bar{Y}$  için yansız olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned}
 E(\bar{y}_{sis}) &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{k} \bar{y}_i = \frac{1}{k} (\bar{y}_1 + \dots + \bar{y}_k) \\
 &= \frac{1}{3} \left( \frac{80 + 42 + 28 + 54 + 92}{5} + \frac{75 + 94 + 36 + 76 + 22}{5} + \frac{60 + 16 + 8 + 88 + 34}{5} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \frac{1}{5} (805) \\
 &= 53,66
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{Y} &= \frac{1}{N} (y_1 + y_2 + \dots + y_N) \\
 &= \frac{1}{15} (805) \\
 &= 53,66
 \end{aligned}$$

olarak bulunur ve

$$E(\bar{y}_{sis}) = \bar{Y}$$

olduğu görülür.

Metot B ile “3’te 1” yapısına göre  $N=nk$  olduğu durumda kitle ortalamasının tahmin edicisinin  $\bar{y}_{sis}$ , kitle ortalaması  $\bar{Y}$  için yansız olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned}
 E(\bar{y}_{sis}) &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N} \bar{y}_i = \frac{n}{N} \sum_{i=1}^k \bar{y}_i = \frac{n}{N} (\bar{y}_1 + \dots + \bar{y}_k) \\
 &= \frac{5}{15} \left( \frac{80 + 42 + 28 + 54 + 92}{5} + \frac{75 + 94 + 36 + 76 + 22}{5} + \frac{60 + 16 + 8 + 88 + 34}{5} \right) \\
 &= \frac{5}{15} (805) \\
 &= 53.66
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{Y} &= \frac{1}{N} (y_1 + y_2 + \dots + y_N) \\
 &= \frac{1}{15} (805) \\
 &= 53.66
 \end{aligned}$$

olarak bulunur ve

$$E(\bar{y}_{sis}) = \bar{Y}$$

olduğu görülür.

Metot A ile “3’te 1” yapısına göre kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansını hesaplayınız.

$$\bar{Y}_1 = \frac{80 + 42 + 28 + 54 + 92}{5} = 59.2$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{75 + 94 + 36 + 76 + 22}{5} = 60.6$$

$$\bar{Y}_3 = \frac{60 + 16 + 8 + 88 + 34}{5} = 41.2$$

olmak üzere kitle varyansı  $S^2$

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y})^2$$

$$= \frac{1}{14} [(80 - 53.66)^2 + (75 - 53.66)^2 + \dots + (34 - 53.66)^2]$$

$$= \frac{1}{14} [11963.33]$$

$$= 854.52$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 = \frac{1}{15} [(80 - 59.2)^2 + (75 - 60.6)^2 + \dots + (34 - 41.2)^2]$$

$$= \frac{1}{15} [10792.8]$$

$$= 719.52$$

$$V(\bar{y}_{sis}) = \frac{N-1}{N} S^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$$

$$= \frac{15-1}{15} (854.52) - (719.52)$$

$$= 78.03$$

olarak bulunur.

Metot A ile "3'te 1" yapısına göre kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansını korelasyon katsayısı  $\rho$  dan yararlanarak hesaplayınız.

Sistemantik örnekleme korelasyon katsayısı;

$$\rho = \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j < j'}^n (Y_{ij} - \bar{Y})(Y_{ij'} - \bar{Y}) \frac{1}{N-1} \frac{1}{S^2}$$

eşitliği kullanılarak hesaplanır. Burada  $(Y_{ij}, Y_{ij'})$  çiftleri

1. Örneklem için	2. Örneklem için	3. Örneklem için
(80, 42)	(75, 94)	(60, 16)
(80, 28)	(75, 36)	(60, 18)
(80, 54)	(75, 76)	(60, 88)
(80, 92)	(75, 22)	(60, 34)
(42, 28)	(94, 36)	(16, 8)
(42, 54)	(94, 76)	(16, 88)
(42, 92)	(94, 22)	(16, 34)
(28, 54)	(36, 76)	(8, 88)
(28, 92)	(36, 22)	(8, 34)
(54, 92)	(76, 22)	(88, 34)

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{j < j'}^n (Y_{ij} - \bar{Y})(Y_{ij'} - \bar{Y}) &= [(-307,1244) + (-675,8844) + \dots + (-675,1244)] \\ &= -3055,33 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j < j'}^n (Y_{ij} - \bar{Y})(Y_{ij'} - \bar{Y}) \frac{1}{N-1} \frac{1}{S^2} \\ &= \frac{2}{4} (-3055.33) \frac{1}{14} \frac{1}{(854.52)} \\ &= -0.128 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Buradan kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansı

$$V(\bar{y}_{sis}) = \frac{N-1}{N} \frac{S^2}{n} [1 + (n-1)\rho]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{14 (854.52)}{15 \cdot 5} [1 + (5 - 1)(-0.128)] \\ &= \frac{14 (854.52)}{15 \cdot 5} [1 + (5 - 1)(-0.128)] \\ &= 78.03 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Metot A ile “3’te 1” yapısına göre kitle toplamının tahmin edicisinin varyansını hesaplayınız.

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_{sis}) &= N^2 V(\bar{y}_{sis}) \\ &= 15^2 (78.03) \\ &= 17557.86 \end{aligned}$$

olarak bulunur.