

Kitle Toplamının Tahmin Edicisinin Varyansı

Kitle toplamının tahmin edicisinin varyansı

$$V(\hat{Y}) = M^2 \frac{M-m}{M} \frac{S_b^2}{m} + \frac{M}{m} \sum_{i=1}^M N_i^2 \frac{(N_i - n_i) S_i^2}{N_i n_i}$$

şeklinde ifade edilir.

Kitle toplamının tahmin edicisinin varyansı iki aşamada bulunur:

- İlk aşamada, kümeler arası değişim hesaplanır:

$$M^2 \frac{M-m}{M} \frac{S_b^2}{m}$$

Burada,

$$S_b^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (Y_i - \bar{Y})^2$$

olarak ifade edilir.

- İkinci aşamada, küme içi değişim hesaplanır:

$$\frac{M}{m} \sum_{i=1}^M N_i^2 \frac{(N_i - n_i) S_i^2}{N_i n_i}$$

Burada,

$$S_i^2 = \frac{1}{N_i - 1} \sum_{j=1}^{N_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$$

olarak ifade edilir.

Burada,

Y_i : i. küme toplamını

Y_{ij} : i. kümedeki j. birimin gözlem değerini

\bar{Y} : Küme başına ortalamayı

\bar{Y}_i : i. küme için birim başına ortalamayı

ifade eder.

Kitle Toplamının Tahmin Edicisinin Varyansının Tahmin Edicisi

Uygulamada kümeler arası varyans S_b^2 ve küme içi varyans S_i^2 bilinmez, bu nedenle bahsedilen parametrelerin yerine sırasıyla tahmin edicileri olan s_b^2 ve s_i^2 kullanılır.

Kitle toplamının tahmin edicisinin varyansının tahmin edicisi

$$\hat{V}(\hat{Y}) = M^2 \frac{M - m}{M} \frac{s_b^2}{m} + \frac{M}{m} \sum_{i=1}^m N_i^2 \frac{(N_i - n_i)}{N_i} \frac{s_i^2}{n_i}$$

olarak ifade edilir.

$$s_b^2 = \frac{1}{m - 1} \sum_{i=1}^m (\hat{Y}_i - \widehat{\bar{Y}})^2$$

ve

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

olarak tanımlanır.

s_i^2 , küme içi varyans S_i^2 'nin yansız bir tahmin edicisidir. Bir başka deyişle,

$$E(s_i^2) = S_i^2$$

olarak ifade edilir.

s_b^2 , kümeler arası varyans S_b^2 'nin yansız bir tahmin edicisi değildir. Bir başka deyişle,

$$E(s_b^2) = S_b^2 + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M N_i^2 \frac{(N_i - n_i)}{N_i} \frac{S_i^2}{n_i}$$

olarak ifade edilir.

Kitle toplamının tahmin edicisinin varyansının tahmin edicisi kitle toplamının tahmin edicisinin varyansının yansız bir tahmin edicisidir. Bir başka deyişle,

$$E[\hat{V}(\hat{Y})] = V(\hat{Y})$$

olarak ifade edilir.

Küme Başına Ortalamanın Tahmin Edicisi \widehat{Y} 'nin Varyansı

Küme toplamının tahmin edicisi

$$\widehat{Y} = M\widehat{\bar{Y}}$$

olarak ifade edilir. Buradan, küme başına ortalamanın tahmin edicisi

$$\widehat{\bar{Y}} = \frac{\widehat{Y}}{M}$$

şeklinde yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned} V(\widehat{\bar{Y}}) &= V\left(\frac{\widehat{Y}}{M}\right) \\ &= \frac{V(\widehat{Y})}{M^2} \\ &= \frac{M - m}{M} \frac{S_b^2}{m} + \frac{1}{Mm} \sum_{i=1}^M N_i^2 \frac{(N_i - n_i) S_i^2}{N_i n_i} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Kitle Ortalamasının Tahmin Edicisi

Kitle ortalamasının tahmin edicisi

$$\begin{aligned} \widehat{\bar{Y}} &= \frac{\widehat{Y}}{N} \\ &= \frac{1}{N} \frac{M}{m} \sum_{i=1}^m \frac{N_i}{n_i} (y_{i1} + y_{i2} + \dots + y_{in_i}) \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

Örneklem ortalaması,

$$\bar{y} = \frac{y}{n}$$

olarak tanımlanır.

Burada,

Y: Kitle toplamını

n: Örneklem çapını

gösterir.

Kitle toplamının tahmin edicisi, kitle toplamı için yansız bir tahmin edicidir. Bir başka deyişle,

$$E(\hat{Y}) = Y$$

olarak ifade edilir.

Kitle ortalamasının tahmin edicisi $\hat{\bar{Y}}$, kitle ortalaması \bar{Y} için yansız bir tahmin edicidir. Bir başka deyişle,

$$\begin{aligned} E(\hat{\bar{Y}}) &= \frac{E(\hat{Y})}{N} \\ &= \frac{Y}{N} \\ &= \bar{Y} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Kitle Ortalamasının Tahmin Edicisinin Varyansı

Kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansı,

$$V(\hat{\bar{Y}}) = V\left(\frac{\hat{Y}}{N}\right) = \frac{1}{N^2} V(\hat{Y})$$

olarak ifade edilir.

Kitle toplamının tahmin edicisinin varyansı,

$$V(\hat{Y}) = M^2 \frac{M - m}{M} \frac{S_b^2}{m} + \frac{M}{m} \sum_{i=1}^M N_i^2 \frac{(N_i - n_i) S_i^2}{N_i n_i}$$

şeklinde ifade edilir.

Buradan

$$V(\hat{\bar{Y}}) = \frac{1}{N^2} \left[M^2 \frac{M - m}{M} \frac{S_b^2}{m} + \frac{M}{m} \sum_{i=1}^M N_i^2 \frac{(N_i - n_i) S_i^2}{N_i n_i} \right]$$

olarak bulunur.

Kitle Ortalamasının Tahmin Edicisinin Varyansının Tahmin Edicisi

Uygulamada kümeler arası varyans S_b^2 ve küme içi varyans S_i^2 bilinmez, bu nedenle bahsedilen parametrelerin sırasıyla tahmin edicileri s_b^2 ve s_i^2 kullanılır.

Kitle ortalamasının tahmin edicisinin varyansının tahmin edicisi

$$\hat{v}(\hat{\bar{Y}}) = \frac{1}{N^2} \left[M^2 \frac{M-m}{M} \frac{s_b^2}{m} + \frac{M}{m} \sum_{i=1}^m N_i^2 \frac{(N_i - n_i) s_i^2}{N_i n_i} \right]$$

olarak ifade edilir. Burada,

$$s_b^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\hat{Y}_i - \hat{\bar{Y}})^2$$

ve

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

olarak tanımlanır.