

M TAHMİN EDİCİLERİ (M ESTIMATORS)

- Uygulama problemlerinde En Küçük Kareler (Least Squares-LS) Tahmin Edicileri yaygın olarak kullanılır.
- LS tahmin edicileri sadece normal dağılım varsayımı altında etkin tahmin edicilerdir.
- Bununla birlikte uygulamada normal olmayan dağılımlar daha yaygındır.

M-tahmin edicileri belirli bir amaç fonksiyonunun minimize edilmesi esasına dayanan robust tahmin edicilerdir. Veri setinin dağılımı normal olmadığında etkin sonuçlar verir.

BİR ADIM (ONE-STEP) HUBER TAHMİN EDİCİLERİ

Bu tahmin ediciler bir adımda çözülebildiklerinden dolayı bir adım (one-step) tahmin ediciler olarak adlandırılır.

W24 TAHMİN EDİCİLERİ

Konum parametresinin W24 tahmin edicisi;

$$\hat{\mu}_W = T_0 + (hS_0) \tan^{-1} \left(\frac{\sum \sin(z_i)}{\sum \cos(z_i)} \right)$$

olarak tanımlanır.

Burada, $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$T_0 = \text{medyan}(y_i)$$

$$S_0 = \text{medyan}|y_i - T_0|$$

$$h = 2.4$$

$$z_i = \frac{y_i - T_0}{hS_0}$$

olarak tanımlanır.

Burada sadece $|z_i| \leq \pi$, $i = 1, 2, \dots, n$ koşulunu sağlayan z_i değerleri kullanılır.

Ölçek parametresinin W24 tahmin edicisi ise

$$\hat{\sigma}_W = hS_0 \left[n \frac{\sum \sin^2(z_i)}{(\sum \cos(z_i))^2} \right]^{1/2}$$

şeklinde hesaplanır.

Bu tahmin ediciler robust'tır, çünkü aykırı değerlerden etkilenmemektedir. Bunun sebebi $-\pi'$ den küçük ve π' den büyük gözlemleri kullanmamasıdır.

Not: Basıklığı 3'den büyük olan dağılımlar uzun kuyruklu dağılım olarak adlandırılır.

BS82 TAHMİN EDİCİLERİ

Konum parametresinin BS82 tahmin edicisi

$$\hat{\mu}_B = T_0 + (hS_0) \frac{\sum \varphi(z_i)}{\sum \varphi'(z_i)}$$

olarak tanımlanır.

Burada; $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$T_0 = \text{medyan}(y_i)$$

$$S_0 = \text{medyan}|y_i - T_0|$$

$$h = 8.2$$

$$z_i = \frac{y_i - T_0}{hS_0}$$

ve

$$\varphi(z) = \begin{cases} z(1 - z^2)^2 & |z| \leq 1 \\ 0 & d.y. \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

$$\varphi'(z) = 1 - 6z^2 + 5z^4$$

olarak elde edilir.

Ölçek parametresinin BS82 tahmin edicisi ise

$$\hat{\sigma}_B = hS_0 \left[n \frac{\sum \varphi^2(z_i)}{(\sum \varphi'(z_i))^2} \right]^{1/2}$$

olarak hesaplanmaktadır.

Bu tahmin ediciler de robust'tır, çünkü -1 den küçük 1 den büyük gözlemleri kullanmamaktadır. Böylelikle, aykırı değerlerin etkisi giderilmiş olur.

Bu bölümde Tiku (1967) tarafından önerilen ve robust bir metot olan uyarlanmış en çok olabilirlik (modified maximum likelihood-MML) metodu kullanılarak elde edilen MML tahmin edicileri kullanılacaktır.

MML TAHMİN EDİCİLERİ

Konum parametresinin MML tahmin edicisi

$$\hat{\mu}_{MML} = \frac{\{\sum_{i=r+1}^{n-r} y_{(i)}\} + r\beta(y_{(r+1)} + y_{(n-r)})}{m}$$

olarak verilir. Burada,

$$m = n - 2r + 2r\beta \quad \text{ve} \quad r = [0.5 + 0.1n]$$

olarak tanımlanır. Ölçek parametresinin MML tahmin edicisi

$$\hat{\sigma}_{MML} = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2\sqrt{A(A-1)}}$$

olarak verilir. Burada,

$$A = n - 2r$$

$$B = r\alpha\{y_{(n-r)} - y_{(r+1)}\}$$

$$C = \sum_{i=r+1}^{n-r} y_{(i)}^2 + r\beta\{y_{(n-r)}^2 - y_{(r+1)}^2\} - m\hat{\mu}_{MML}^2$$

şeklinde ifade edilir.

Not: α ve β değerleri tablodan bulunur.

Örnek: Aşağıdaki veri setini kullanarak

-53, -35, 1, 5, 11, 18, 22, 25, 27, 33, 45, 51, 54, 63, 77

- a) \bar{y} , s (LS)
- b) $\hat{\mu}_T$, $\hat{\sigma}_T$ (Budlanmış Ortalama ve Standart Sapma)
- c) $\hat{\mu}_W$, $\hat{\sigma}_W$ (W24)
- d) $\hat{\mu}_B$, $\hat{\sigma}_B$ (BS82)
- e) $\hat{\mu}_{MML}$, $\hat{\sigma}_{MML}$ (MML)

tahmin edicilerini hesaplayınız.

- a) Konum ve ölçek parametrelerinin LS tahmin edicileri

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = 22.9333$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (y_i - \bar{y})^2 = 1213.1 \rightarrow s = 34.8296$$

- b) Konum ve ölçek parametrelerinin budlanmış ortalama ve budlanmış standart sapma tahmin edicileri

$$\hat{\mu}_T = \frac{\sum_{i=r+1}^{n-1} y_{(i)}}{n-2r} = 26.5455$$

$$\hat{\sigma}_T^2 = \frac{\left\{ \sum_{i=r+1}^{n-r} (y_{(i)} - \hat{\mu}_T)^2 \right\} + r(y_{(r+1)} - \hat{\mu}_T)^2 + r(y_{(n-r)} - \hat{\mu}_T)^2}{n-2r-1} = 600.1372 \Rightarrow \hat{\sigma}_T = 24.4977$$

olarak hesaplanır.

c) Konum ve ölçek parametrelerinin W24 tahmin edicileri

$y_{(i)}$	$ y_i - T_0 $	z_i	$\sin(z_i)$	$\sin^2(z_i)$	$\cos(z_i)$
-53	78	-1.6250	-0.9985	0.9971	-0.0542
-35	60	-1.2500	-0.9490	0.9006	-0.3153
1	24	-0.5000	-0.4794	0.2298	0.8776
5	20	-0.4167	-0.4047	0.1638	0.9144
11	14	-0.2917	-0.2875	0.0827	0.9578
18	7	-0.1458	-0.1453	0.0211	0.9894
22	3	-0.0625	-0.0625	0.0039	0.9980
25	0	0	0	0	1
27	2	0.0417	0.0417	0.0017	0.9991
33	8	0.1667	0.1659	0.0275	0.9861
45	20	0.4167	0.4047	0.1638	0.9144
51	26	0.5417	0.5156	0.2658	0.8569
54	29	0.6042	0.5681	0.3227	0.8230
63	38	0.7917	0.7115	0.5063	0.7027
77	52	1.0833	0.8835	0.7806	0.4684
			-0.0360	4.4674	11.7490

$$T_0 = \text{medyan}(y_i) = 25$$

$$S_0 = \text{medyan}|y_i - T_0| = 20$$

$$h = 2.4$$

$$z_i = \frac{y_i - T_0}{hS_0} = \frac{y_i - 25}{48}$$

Burada tüm i değerleri için $|z_i| \leq \pi$ olduğundan toplama işleminde z_i 'lerin hepsi yer alır.

Dolayısıyla, konum ve ölçek parametrelerinin W24 tahmin edicileri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_W &= T_0 + (hS_0) \tan^{-1} \left(\frac{\sum \sin(z_i)}{\sum \cos(z_i)} \right) \\
&= 25 + (2.4)(20) \tan^{-1} \left(\frac{-0.0360}{11.7490} \right) \\
&= 25 + 48 \tan^{-1}(-0.0031) \\
&= 24.8528
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_W &= hS_0 \left[n \frac{\sum \sin^2(z_i)}{(\sum \cos(z_i))^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= 40.8 \left[15 \frac{4.4674}{11.7490^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= 33.4439
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

d) Konum ve ölçek parametrelerinin BS82 tahmin edicileri

$y(i)$	z_i	$\varphi(z_i)$	$\varphi'(z_i)$	$\varphi^2(z_i)$
-53	-0.4756	-0.2848	-0.1014	0.0811
-35	-0.3659	-0.2745	0.2865	0.0753
1	-0.1463	-0.1401	0.8738	0.0196
5	-0.1220	-0.1184	0.9119	0.0140
11	-0.0854	-0.0841	0.9565	0.0071
18	-0.0427	-0.0425	0.9891	0.0018
22	-0.0183	-0.0183	0.9980	0.0003
25	0	0	1	0
27	0.0122	0.0122	0.9991	0.0001
33	0.0488	0.0485	0.9858	0.0024
45	0.1220	0.1184	0.9119	0.0140
51	0.1585	0.1507	0.8524	0.0227
54	0.1768	0.1659	0.8173	0.0275
63	0.2317	0.2075	0.6923	0.0431
77	0.3171	0.2565	0.4473	0.0658
		-0.0029	11.6204	0.3749

$$T_0 = \text{medyan}(y_i) = 25$$

$$S_0 = \text{medyan}|y_i - T_0| = 20$$

$$h = 8.2$$

$$z_i = \frac{y_i - T_0}{hS_0} = \frac{y_i - 25}{164}$$

Burada tüm i değerleri için $|z_i| \leq 1$ olduğundan toplama işleminde z_i 'lerin hepsi yer alır.

Dolayısıyla, konum ve ölçek parametrelerinin BS82 tahmin edicileri sırasıyla

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_B &= T_0 + (hS_0) \frac{\sum \varphi(z_i)}{\sum \varphi'(z_i)} \\ &= 25 + 164 \frac{-0.0029}{11.6204} \\ &= 24.9584\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_B &= hS_0 \left[n \frac{\sum \varphi^2(z_i)}{(\sum \varphi'(z_i))^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 164 \left[15 \frac{0.3749}{11.6204^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 33.4681\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

e) Konum ve ölçek parametrelerinin MML tahmin edicileri

Burada, $r = [0.5 + (0.1)15] = 2$ alınarak alttan ve üstten ikişer değer sansürlenir geriye aşağıda gösterilen 11 gözlem kalır.

$$1, 5, 11, 18, 22, 25, 27, 33, 45, 51, 54$$

$$n = 15 \text{ ve } q = \frac{r}{n} = \frac{2}{15} \approx 0,01 \Rightarrow \alpha = 0.690, \beta = 0.831$$

$$m = n - 2r + 2r\beta = 15 - 4 + 4(0.831) = 14.324$$

Dolayısıyla, konum ve ölçek parametrelerinin MML tahmin edicileri sırasıyla

$$\hat{\mu}_{MML} = \frac{292 + 2(0.831)(1 + 54)}{14.324} = 26.7670$$

ve

$$\hat{\sigma}_{MML} = \frac{B + \sqrt{(B^2) + 4AC}}{2\sqrt{A(A - 1)}} = 27.2430$$

olarak hesaplanır.

Burada $A = 11$, $B = 73.14$ ve $C = 5522$ 'dir.

Daha detaylı bilgi için aşağıdaki kaynaktan yararlanılabilir.

Hoaglin, D. C., Mosteller, F. and Tukey, J. W. (1983) Understanding Robust and Exploratory Data Analysis. John Wiley & Sons, Inc., New York.