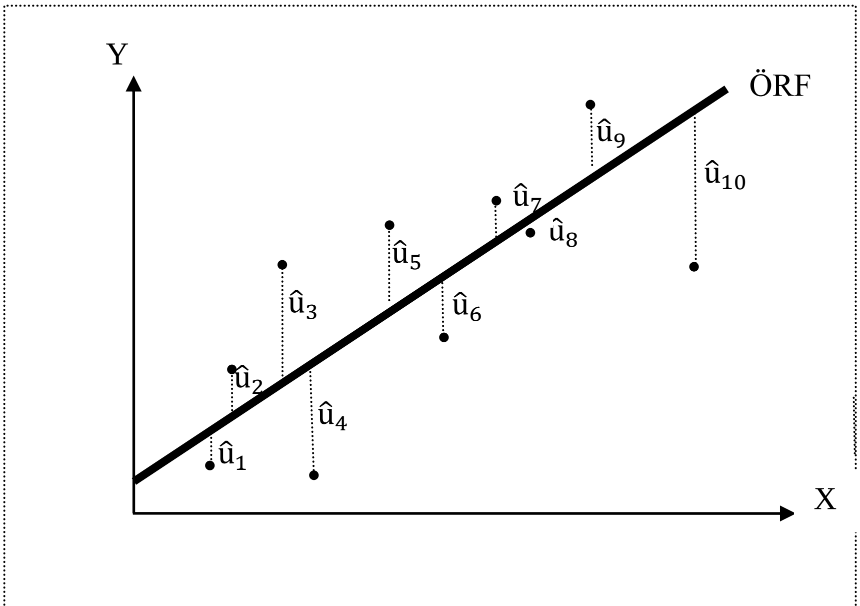
3. TAHMİN

3.1. En Küçük Kareler (EKK) Yöntemi[1]

En Küçük Kareler (EKK) yöntemi, regresyon çözümlemesinde en yaygın olarak kullanılan, daha sonra ele alınacak bazı varsayımlar altında çok aranan istatistiki özelliklere sahip yöntemdir.

Regresyon çözümlemesinde amaç gerçek Y'ye olabildiğince yakın değerler veren katsayı tahminleri bulmaktır. Bu bölümde ARF'nin $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i$ olduğu durum üzerinden işlemler gösterilecektir. Bu durumda ÖRF $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$, ve ÖRD $Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + \hat{u}_i$ şeklindedir. Burada örneklem hata terimi ($\hat{u}_i$) gözlemlenen ve tahmin edilen Y değerleri arasındaki farktır: $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i$. EKK yönteminde amaç, bu hata terimlerini olabildiğince düşük verecek katsayı tahmin değerleri bulmaktır.

Grafik 3.1: Örneklem Hata Terimleri



Örneklem regresyon eğrisi $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ değerlerini verdiğinden gözlemlenen Y değerleri ile bu eğri arasındaki uzaklık hata terimlerini ($\hat{u}_i$) vermektedir. EKK yöntemi bu hata terimlerinin karelerinin toplamını ($\sum \hat{u}_i^2$) en küçük yapacak katsayı tahmin değerlerini

[1] Ordinary Least Squares (OLS)

hesaplar. Burada karenin alınmasının nedeni toplam alınırken artı ve eksilerin birbirini götürmesini engellemektir.

Hata terimlerinin kareleri,

$\sum \hat{u}_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2$ olduğundan, bunu en küçük yapacak katsayı tahmin değerleri ($\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$), bu ifadenin sırasıyla $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$'e göre türevini alınıp çıkan ifadenin sıfıra eşitlenmesiyle bulunur[2]:

$$\frac{\partial \sum \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} = -2 \sum \hat{u}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \hat{u}_i = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \sum \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = -2 \sum \hat{u}_i X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \hat{u}_i X_i = 0 \tag{3.2}$$

(3.1) ve (3.2) no'lu denklemler EKK yönteminin *normal denklemleri* olarak adlandırılır.

(3.1) no'lu denlemden $\sum \hat{u}_i = \sum (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = \sum Y_i - \sum \hat{\beta}_0 - \sum \hat{\beta}_1 X_i = 0$ ve böylece

$$\sum Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_i \tag{3.3}$$

bulunur. İkinci satıra geçerken $\hat{\beta}_0$ve $\hat{\beta}_1$'in sabitliği kullanılmıştır.

(3.2) no'lu denlemden $\sum \hat{u}_i X_i = \sum (Y_i X_i - \hat{\beta}_0 X_i - \hat{\beta}_1 X_i^2) = 0$ ve böylece

$$\sum Y_i X_i = \hat{\beta}_0 \sum X_i + \hat{\beta}_1 \sum X_i^2 \tag{3.4}$$

(3.3) ve (3.4) no'lu denklemler de normal denklemlerdir ve sırasıyla (3.1) ve (3.2) no'lu denklemlere karşılık gelmektedir.

(3.3) no'lu denklemden

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum Y_i - \hat{\beta}_1 \sum X_i}{n} \tag{3.5}$$

(3.4) ve (3.5) no'lu denklemlerden

[2] Bu işlem birinci mertebe koşullarını oluşturur. İkinci mertebe koşullarının, diğer bir deyişle hata terimleri kareleri toplamının en küçük olmasını sağlayan koşulların da sağlandığı görülebilir. Bu işlem okuyucuya bırakılmıştır.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum Y_iX_i - \sum Y_i \sum X_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \tag{3.6}$$

Bu ifade (3.5)'de yerine konulursa aşağıdaki sonuç elde edilecektir.

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum X_i^2 \sum Y_i - \sum X_i \sum X_iY_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \tag{3.7}$$

(3.6) ve (3.7) no'lu denklemler *EKK tahmin edicileri*dir.

EKK tahmin edicileri, hangi veriler kullanılırsa kullanılsın, aşağıdaki özellikleri her zaman sağlarlar.

1) Hata terimlerinin ($\hat{u}_i$) ortalaması sıfırdır. Kanıt:
   Birinci normal denkleme (denklem 3.1) göre $\sum \hat{u}_i = 0$ olduğundan $\sum \hat{u}_i/n = \bar{\hat{u}} = 0$
2) Hata terimleri ($\hat{u}_i$) Y_i tahminleri ile ilişkisizdir. Kanıt:
   $$\begin{aligned}\sum \hat{Y}_i\hat{u}_i &= \sum (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i)\hat{u}_i \\ &= \hat{\beta}_0 \sum \hat{u}_i + \hat{\beta}_1 \sum X_i \hat{u}_i \\ &= \hat{\beta}_1 \sum X_i \hat{u}_i \qquad (\textstyle\sum \hat{u}_i = 0 \text{ olduğundan}). \\ &= \hat{\beta}_1 \sum X_i (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) \\ &= \hat{\beta}_1 (\textstyle\sum Y_iX_i - \hat{\beta}_0 \sum X_i - \hat{\beta}_1 \sum X_i^2) \\ &= \hat{\beta}_1 (\hat{\beta}_0 \textstyle\sum X_i + \hat{\beta}_1 \sum X_i^2 - \hat{\beta}_0 \sum X_i - \hat{\beta}_1 \sum X_i^2) \text{ (3.4'den)} \\ &= 0\end{aligned}$$
3) Hata terimleri ($\hat{u}_i$) X_i ler ile ilişkisizdir. Kanıt:
   İkinci normal denkleme (denklem 3.2) göre $\sum \hat{u}_i X_i = 0$

3.2. En Küçük Kareler Yönteminin Ardındaki Varsayımlar

EKK yönteminin arkasındaki varsayımlar, gerçek regresyon modeli ve veri üretme süreci ile ilgili ideal durumu tarif eder. EKK'in iyi bir tahmin olabilmesi için bu varsayımların karşılanması gerekir. Çoğu veri seti bu ideal koşulları sağlamaz. Ancak bunlar bir kıyas noktası oluştururlar. İdeal koşulları bilmek önemlidir. Çünkü böylece bu koşulların sağlanmadığı durumları kontrol edebilmek ve EKK yöntemi sonuçlarının sapmasızlığını koruyabilmek mümkün olur. Gausgil ya da klasik doğrusal regresyon modeli, açıklayıcı değişkenler, hata terimleri ve modelle ilgili aşağıdaki varsayımları yapar.

1) **Doğrusal regresyon modeli**: Regresyon modeli katsayılarda doğrusaldır. Bu varsayım, daha önce kullandığımız iki değişkenli modelde

   $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i,$ (3.8)

   birden çok açıklayıcı değişken bulunan modelde

   $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki}$ (3.9)

   şeklindedir. Bu varsayım, katsayılarla ilgilidir. Y veya X değişkenlerinin doğrusal olması gerekmez.

2) **X değerleri yinelenen örneklemlerde değişmez:** X'ler rassal değişken değildir. Örnek 1'den alınan rassal örneklemde X değerlerinin iki örneklemde de aynı olduğunu, Y değerlerinin farklılaştığını hatırlayalım. İkinci varsayım gereği daha fazla rassal örneklem seçseydik de X değerleri yine aynı kalacaktı. Bunun nedeni örneklem seçiminde her bir X değerine karşılık gelen Y değerlerinden birinin rassal olarak seçilmesidir.

3) **Hata terimlerinin (u_i) ortalaması sıfırdır:** X değerleri veriyken hata terimlerinin beklenen değeri sıfırdır.

   Bu varsayımın gösterimi, 3.8 denklemindeki iki değişkenli model için

   $E(u_i|X_i) = 0$

   3.9 denklemindeki çok değişkenli model için

   $E(u_i| X_{1i}, X_{2i}, \ldots, X_{ki}) = 0$

   şeklindedir. Bölüm 2, Örnek 1 için Tablo 2.4'de bu varsayımın geçerliliği gösterilmiştir. Tablo'dan da görülebileceği gibi bazı Y değerleri koşullu ortalamaların üstünde (hata terimleri pozitif), bazıları altındadır (hata terimleri negatif). Üçüncü varsayım, bu pozitif ve negatif değerlerin birbirini götüreceğini, ortalamadan sapmaların ortalamasının sıfır olduğunu söyler.

   Hata terimlerinin Y'yi etkileyen X dışındaki faktörleri yansıttığı düşünülürse, bu varsayımın söylediği, sözkonusu faktörlerin Y'yi sistematik bir şekilde etkilemediğidir.

   Bu varsayımın bir sonucu $E(Y_i|X_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$ olmasıdır.

4) **Sabit Varyans:** X değerleri veriyken hata terimlerinin (u_i) varyansı bütün gözlemleri için aynıdır. İki değişkenli model için:

$$Var(u_i|X_i) = E[u_i - E(u_i)|X_i]^2$$
$$= E[u_i|X_i]^2 \quad \text{(çünkü 3. varsayım gereği } E(u_i)=0)$$
$$= \sigma^2$$

$Var(u_i) = \sigma^2$ eşitliği çok değişkenli model için de geçerlidir. Dördüncü varsayıma göre her X_i değeri için hata teriminin (u_i) varyansı σ^2'e eşit sabit bir sayıdır. Bu aynı zamanda her X_i değeri için Y'nin varyansının sabit olması demektir. Çünkü

$$Var(Y_i|X_i) = E[Y_i - E(Y_i)|X_i]^2 = E[u_i|X_i]^2 = \sigma^2$$

Bu varsayımın yerine gelmemesi durumu *değişen varyans sorunu* olarak adlandırılır ve

$Var(u_i|X_i) = \sigma_i^2$ ile gösterilir. Burada her bir X_i değerine karşılık gelen hata terimlerinin varyansı birbirinden farklıdır. Bu durum daha sonra, ekonometrik sorunlar bölümünde ele alınacaktır.

5) **Hata terimleri arasında içsel bağıntı (otokorelasyon) sorunu yoktur**: X_i ve X_j ($i \neq j$) gibi iki X değeri için u_i ile u_j ($i \neq j$) arasındaki korelasyon sıfırdır. İki değişkenli model için:

$$Cov(u_i, u_j| X_i, X_j) = E[u_i - E(u_i)|X_i][u_j - E(u_j)|X_j]$$
$$= E[u_i|X_i][u_j|X_j] \quad \text{(çünkü 3. varsayım gereği } E(u_i)=0)$$
$$= 0$$

Bu sonuç çok değişkenli model için de geçerlidir. Beşinci varsayım, u_i ve u_j hata terimlerinin ilişkisiz olduğunu söyler. Bu varsayımın yerine gelmemesi durumu *ardışık bağımlılık* (*içsel bağıntı, otokorelasyon) sorunu* olarak adlandırılır. Bu sorun ileride, ekonometrik sorunlar bölümünde incelenecektir.

6) **u_i ile X_i'ler arasındaki kovaryans sıfırdır:**

İki değişkenli model için:

$$Cov(u_i, X_i) = E[u_i - E(u_i)][X_i - E(X_i)]$$
$$= E[u_i(X_i - E(X_i)] \quad \text{(çünkü 3. varsayım gereği } E(u_i)=0)$$
$$= E[u_iX_i - u_iE(X_i)]$$
$$= E(u_iX_i) - E(X_i)E(u_i) \quad \text{(çünkü 2. varsayım X rassal değildir)}$$
$$= E(u_iX_i) \quad \text{(çünkü 3. varsayım gereği } E(u_i)=0)$$

$= 0$

Çok değişkenli model için:

$Cov(u_i, X_{1i})= Cov(u_i, X_{2i})= \ldots = Cov(u_i, X_{ki})$

Altıncı varsayım, u hata terimleri ile X açıklayıcı değişkenleri arasında ilişki olmadığını söyler. Eğer bu varsayım geçerli değilse, X ve u'nun Y üzerindeki tekil etkilerini bulmak olanaksızlaşır.

İkinci ve üçüncü varsayımlar geçerli ile altıncı varsayım da kendiliğinden geçerli olacaktır.

7) **Gözlem sayısı tahmin edilecek anakütle katsayılarından fazla olmalıdır:** Açıklayıcı değişken sayısı k olan 3.9 gibi bir modelde gözlem sayısı, n, k'dan büyük olmalıdır.

8) **X'lerdeki değişkenlik:** Belli bir örneklemdeki X değerlerinin hepsi aynı olmamalıdır.

9) **Model doğru kurulmalıdır:** Bu koşulun sağlanmaması durumunda doğru olmayan tahminler elde edilir.

10) **Açıklayıcı değişkenler arasında doğrusal ilişki yoktur:** Çok sayıda açıklayıcı değişkenin olduğu modelde X'ler arasında doğrusal ilişki olmadığı varsayılmaktadır. Bu varsayımın geçerli olmaması durumu *çoklu bağıntı sorunu* olarak adlandırılır. Bu sorun daha sonra ekonometrik sorunlar bölümünde ele alınacaktır.

3.3. Gauss-Markov Teoremi

Klasik doğrusal regresyon modelinin varsayımları geçerliyken EKK tahminleri en iyi özellikleri taşır. Bu özellikler Gauss-Markov teoremi tarafından tanımlanmıştır. Bu teoreme göre klasik doğrusal regresyon modelinin varsayımları geçerliyken EKK tahmin edicisi doğrusal en iyi sapmasız tahmin edicidir (DESTE)[3]. *Doğrusallık*, modelin bağımlı değişkeni (Y) gibi rassal bir değişkenin doğrusal fonksiyonu olmasını, *sapmasızlık*, ortalaması veya

[3] BLUE: best linear unbiased estimator

beklenen değerinin gerçek değerine eşit olmasını, *en iyilik* (veya etkinlik) ise doğrusal sapmasız tahmin ediciler içinde en düşük varyansa sahip olmayı ifade eder.

3.4. En Küçük Kareler Tahmin Edicilerinin Varyans ve Kovaryansları

En küçük kareler tahmin edicileri, 3.6 ve 3.7 eşitliklerinin de gösterdiği gibi örneklem verilerinin bir fonksiyonudur. Dolayısıyla alacağı değerler örneklemden örnekleme değişecektir. Örneklem seçimi rassal olduğuna göre, bu durumda tahmin ediciler de rassal değişkendir, alacağı değer rassal olarak belirlenir. Öyleyse her rassal değişken gibi tahmin edicilerin de varyansları ve kovaryansları vardır. Bu varyanslar tahmin edicilerin güvenilirliğini veya doğruluk derecesini gösterir. Klasik doğrusal regresyon modelinin varsayımları geçerliyken iki değişkenli (3.8'deki) modelde tahmin edicilerin ($\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$) varyansları ve kovaryansları aşağıdaki gibi bulunmaktadır[4].

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_0)=\sigma_u^2\frac{\sum X_i^2}{n\sum X_i^2-(\sum X_i)^2} \tag{3.10}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)=\sigma_u^2\frac{n}{n\sum X_i^2-(\sum X_i)^2} \tag{3.11}$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1)=\sigma_u^2\frac{(-\sum X_i)}{n\sum X_i^2-(\sum X_i)^2} \tag{3.12}$$

$$\sigma_u^2=\frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-k} \tag{3.13}$$

Burada k denklemde yer alan katsayı adedidir.

[4] Kanıt için bkz Gujarati ve Porter (2012) Ek 3A.

Örnek 3.1: Tablo 2.5'de yer alan Örneklem 1'e ait verileri kullanarak $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ modelini EKK yöntemi ile tahmin edelim: $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$, $Var(\hat{\beta}_0), Var(\hat{\beta}_1)$ ve $Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ değerlerini hesaplayalım.

Katsayı tahminleri için 3.6 ve 3.7'de formüllerinde yerine koymak amacıyla $\sum Y_i$, $\sum X_i$, $\sum X_i Y_i$, $\sum X_i^2$ değerlerine ihtiyacımız var. Bunun için aşağıdaki tabloyu kullanabiliriz.

Tablo 3.1: Örneklem 1 Değerleri

	Y_i	**X_i**	**$X_i Y_i$**	**Y_i^2**	**X_i^2**
	70	80	5,600	4,900	6,400
	65	100	6,500	4,225	10,000
	90	120	10,800	8,100	14,400
	95	140	13,300	9,025	19,600
	110	160	17,600	12,100	25,600
	115	180	20,700	13,225	32,400
	120	200	24,000	14,400	40,000
	140	220	30,800	19,600	48,400
	155	240	37,200	24,025	57,600
	150	260	39,000	22,500	67,600
Σ	**1,110**	**1,700**	**205,500**	**132,100**	**322,000**

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum X_i^2 \sum Y_i - \sum X_i \sum X_i Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{(322{,}000)(1{,}110) - (1{,}700)(205{,}500)}{(10)(322{,}000) - (1{,}700)^2} = 24.4546$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum Y_i X_i - \sum Y_i \sum X_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{(10)(205{,}500) - (1{,}110)(1{,}700)}{(10)(322{,}000) - (1{,}700)^2} = 0.5090$$

Bu sonuçlar, bölüm 2.4'de verilen örnekteki sonuçlarla (yuvarlamalar hariç) aynıdır.

Varyans ve kovaryans hesabı için ise $\sum \hat{u}_i^2$ hesaplanmalı. Bu amaçla Y'nin tahmin edilmiş değerleri ($\hat{Y}_i$) ile buna bağlı olarak $\hat{u}_i$ hesaplanmalı.

Tablo 3.2: Örneklem 1 Değerleri ve Hata Terimleri

	Y_i	X_i	$\hat{Y}_i$ $=24.4546+0.5090X_i$	$\hat{u}_i$ $=Y_i-\hat{Y}_i$	$\hat{u}_i^2$
	70	80	65	5	23
	65	100	75	-10	107
	90	120	86	4	20
	95	140	96	-1	1
	110	160	106	4	17
	115	180	116	-1	1
	120	200	126	-6	39
	140	220	136	4	13
	155	240	147	8	70
	150	260	157	-7	46
Σ	**1,110**	**1,700**	**1,110**	**0**	**337**

$$\hat{\sigma}_u^2=\frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-k}=\frac{337}{10-2}=42.16$$

$$Var(\hat{\beta}_0)=\hat{\sigma}_u^2\frac{\sum X_i^2}{n\sum X_i^2-(\sum X_i)^2}=(42.16)\frac{322{,}000}{(10)(322{,}000)-(1{,}700)^2}=41.138$$

$$Var(\hat{\beta}_1)=\hat{\sigma}_u^2\frac{n}{n\sum X_i^2-(\sum X_i)^2}=(42.16)\frac{10}{(10)(322{,}000)-(1{,}700)^2}=0.0013$$

$$Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1)=\hat{\sigma}_u^2\frac{(-\sum X_i\ )}{n\sum X_i^2-(\sum X_i)^2}=(42.16)\frac{(-1700)}{(10)(322{,}000)-(1{,}700)^2}=-0.217$$