5. FONKSİYON KALIPLARI VE KUKLA DEĞİŞKENLER

5.1. Fonksiyon Kalıpları

Bölüm 4.1'de doğrusal bir modelin katsayılarının yorumu ele alınmıştır. Bu bölümde farklı fonksiyon kalıpları olması durumunda katsayıların nasıl yorumlanacağı incelenmektedir.

5.1.1 Çift Logaritmik Model

$$Y_i = e^{\beta_0} X_{1i}^{\beta_1} X_{2i}^{\beta_2} \dots X_{ki}^{\beta_k} e^{u_i} \qquad (5.1)$$

Üstel modeli, iki tarafın doğal logaritması alınarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\ln Y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln X_{1i} + \beta_2 \ln X_{2i} + \dots + \beta_k \ln X_{ki} + u_i \qquad (5.2)$$

Bu model, katsayılarda doğrusaldır, dolayısıyla EKK ile tahmin edilebilir. Katsayı yorumları aşağıdaki gibidir.

β_0: $\ln X_{1i} = \ln X_{2i} = \dots = \ln X_{ki} = 0$ iken $\ln Y_i$'nin aldığı değerdir.

β_1: Y'nin X_1'e göre esnekliğidir. Yani $\ln X_{2i}, \dots, \ln X_{ki}$ sabitken X_1'deki %1 oranındaki değişmenin Y üzerindeki etkisinin yüzde kaç olacağını gösterir. Bunun nedenini şu şekilde gösterebiliriz. Katsayı, eşitliğin sol tarafının sağ tarafına göre kısmi türevi olduğuna göre,

$$\beta_1 = \frac{\partial lnY}{\partial lnX_1} = \frac{\partial lnY}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial lnX_1} = \frac{\partial lnY}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial lnX_1} = \frac{1}{Y}\frac{\partial Y}{\partial X_1}\frac{1}{1/X_1} = \frac{\partial Y/Y}{\partial X_1/X_1}$$

Son bulunan ifade esneklik tanımıdır.

Herhangi bir β_j: Y'nin X_j'ye göre esnekliğidir.

Örnek 5.1: $\ln Y_t = \beta_0 + \beta_1 \ln X_t + u_t$ modelinde Y süt üretim düzeyi (milyon TL) ve X sütün fiyatıdır (TL). Modelin Türkiye 1985-2012 verileri ile tahmini şu sonucu vermiştir: $\widehat{\ln Y_t} = 10.43 + 1.96 \ln X_t$. Katsayıların yorumu aşağıdaki gibidir.

β_0: $\ln X = 0$ iken $\ln Y = 10.43$'tür.

β_1: Sütün fiyatındaki %1 artış, süt üretimini %1.96 arttırır. Süt üretiminin fiyat esnekliği 1.96'dır.

5.1.2 Yarı Logaritmik Modeller

$$Y_i = e^{\beta_0+\beta_1 X_{1i}+\cdots+\beta_k X_{ki}+u_i} \tag{5.3}$$

Üstel modeli, iki tarafın doğal logaritması alınarak aşağıdaki gibi yarı logaritmik doğrusal olarak yazılabilir.

$$\ln Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + u_i \tag{5.4}$$

Bu modelin katsayı yorumları aşağıdaki gibidir.

β_0: $X_{1i} = X_{2i} = \ldots = X_{ki} = 0$ iken $\ln Y_i$'nin aldığı değerdir.

β_1: X_1 dışındaki açıklayıcı değişkenler sabitken X_1'deki 1 birimlik değişmenin Y üzerindeki etkisinin yüzde kaç olacağını gösterir. Bu katsayı aşağıdaki kısmi türev ile gösterilebilir.

$$\beta_1 = \frac{\partial lnY}{\partial X_1} = \frac{\partial lnY}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial X_1} = \frac{1}{Y}\frac{\partial Y}{\partial X_1} = \frac{\partial Y/Y}{\partial X_1}$$

Dolayısıyla β_1, X 1 birim arttığında dY/Y'nin ne kadar olacağını gösterir.

Herhangi bir β_j: X_j dışındaki açıklayıcı değişkenler sabitken X_j'deki 1 birimlik değişmenin Y üzerindeki etkisinin yüzde kaç olacağını gösterir.

Örnek 5.2: $\ln I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t$ modelinde I özel yatırımlar (milyon TL) ve Y GSYİH'dır (milyon TL). Modelin Türkiye 1990-2002 verileri ile tahmini şu sonucu vermiştir: $\widehat{\ln I}_t = 0.4 + 0.09Y_t$. Katsayıların yorumu aşağıdaki gibidir.

β_0: GSYİH 0 iken özel yatırımlarının logaritması 0.4'tür.

β_1: GSYİH 1 milyon TL arttığında dY/Y=0.09=9/100 olur. Yani GSYİH 1 milyon TL arttığında özel yatırımlar yüzde 9 artar.

İkinci bir tür yarı logaritmik model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln X_{1i} + \beta_2 \ln X_{2i} + \ldots + \beta_k \ln X_{ki} + u_i \tag{5.5}$$

şeklindedir. Burada

β_0: $\ln X_{1i} = \ln X_{2i} = \ldots = \ln X_{ki} = 0$ iken Y_i'nin aldığı değeri gösterir.

β_1: X_1 dışındaki açıklayıcı değişkenler sabitken X_1'deki %1 oranındaki değişmenin Y üzerindeki etkisinin kaç birim olacağını gösterir. Bu katsayı aşağıdaki kısmi türev ile gösterilebilir.

$$\beta_1 = \frac{\partial Y}{\partial lnX_1} = \frac{\partial Y}{\partial X_1/X_1}$$

Herhangi bir β_j: X_j dışındaki açıklayıcı değişkenler sabitken X_j'deki %1 oranındaki değişmenin Y üzerindeki etkisinin kaç birim olacağını gösterir.

Örnek 5.3: $\mathrm{I_t = \beta_0 + \beta_1 lnY_t + \beta_2 lnI_{t-1} + u_t}$ modelinde $\mathrm{I_{t-1}}$ özel yatırımların bir önceki yıl değeridir. Tahmin şu sonucu aşağıdaki gibidir.
$\mathrm{\hat{I}_t = -5.2 + 73lnY_t + 24lnI_{t-1}}$.

β_0: GSYİH ve bir önceki yılın özel yatırımlarının logaritmaları 0 iken bu dönem özel yatırımları -5.2 milyon TL.dir.

β_1: Bir önceki yılın özel yatırımları sabitken, dY/Y=1 olduğunda dI = 73 olur. Veya dY/Y=1/100 olduğunda yani GSYİH yüzde 1 arttığında dI=73/100 olur yani bu dönem özel yatırımları 0.73 milyar TL artar. Özetle, bir önceki yılın özel yatırımları sabitken GSYİH yüzde 1 arttığında bu dönem özel yatırımları 0.73 milyar TL artar.

β_2: GSYİH sabitken bir önceki yılın özel yatırımları yüzde 1 arttığında bu dönem özel yatırımları 0.24 milyar TL artar.

5.1.3 Yüzde Değişmeler Modelleri

Bu alt bölümde hem bağımlı hem de açıklayıcı değişkenlerin % değişmeler ile ifade edildiği modellerin katsayı yorumlarına yer verilecektir.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + u_i \qquad (5.6)$$

modelinde y Y'deki yüzde değişmeyi, x_j X_j'deki yüzde değişmeyi göstersin. Katsayı yorumları aşağıdaki gibidir.

β_0: X'lerdeki değişme 0 iken ($x_{1i} = x_{2i} = \ldots = x_{ki} = 0$ iken) yani X'ler sabitken Y_i'deki değişmeyi (y_i'nin değerini) verir.

β_1: x_{2i}, …, x_{ki} sabitken x_1'deki 1 puanlık değişmenin y üzerindeki etkisinin kaç puan olacağını gösterir.

$$\beta_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1}$$

Herhangi bir β_j: diğer x'ler sabitken x_j'deki 1 puanlık değişmenin y üzerindeki etkisinin kaç puan olacağını gösterir.

Örnek 5.4: $p_t = \beta_0 + \beta_1 d_t + \beta_2 m_t + u_t$ modelinde p enflasyon oranı (ÜFE'deki yüzde değişme), d döviz kurundaki yüzde değişme ve m para arzındaki yüzde değişmedir. Denklemin Türkiye'ye ait 1990-2010 verileri ile tahmini şu sonucu vermiştir.
$\hat{p}_t = 5.4 - 0.37 d_t + 0.1 m_t$

β_0: döviz kurundaki ve para arzındaki yüzde değişme 0 iken enflasyon oranı %5.4'tür.

β_1: para arzındaki yüzde değişme sabitken döviz kurundaki yüzde değişmede ortaya çıkan 1 puanlık artış, enflasyon oranını 0.37 puan azaltır.

β_2: döviz kurundaki yüzde değişme aynı düzeyde kalırken para arzındaki yüzde değişmede ortaya çıkan 1 puanlık artış, enflasyon oranını 0.1 puan arttırır.

5.2. Kukla Değişkenler

Bazı durumlarda açıklayıcı değişkenler nitelikleri gösterir. Örneğin kişinin cinsiyeti, zaman serisinde ekonomik kriz yaşanan yıllar, mevsimler gibi. Bu değişkenler 0 veya 1 değerini alan kukla değişkenlerle temsil edilir. Sabit kuklası veya eğim kuklası olarak karşımıza çıkabilir. Kukla değişkenler denklemde niceliksel değişkenlerle veya başka kuklalarla beraber kullanılabilir.

5.2.1 Sabit kuklası

Sabit kuklası niteliksel değişikliği sabit terim yoluyla yansıtır.

Örnek 5.5: Bir firmada çalışanların ücretlerinin cinsiyete göre farklılaştığı düşünülmektedir. Bu amaçla bağımlı değişkenin (Y) kişinin aylık ücreti (TL), açıklayıcı değişkenin (D) çalışanın kadın olması durumunda 0, erkek olması durumunda 1 değerini aldığı bir kukla olduğu bir model tahmin edilecektir:

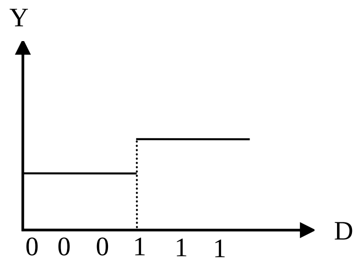
$Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + u_i$

Bu modele göre bir kadın çalışanın ücreti $E(Y|D=0) = \beta_0 + \beta_1(0) = \beta_0$,

bir erkek çalışanın ücreti $E(Y|D=1) = \beta_0 + \beta_1(1) = \beta_0 + \beta_1$ dir.

Sabit terim kadın çalışanın ortalama ücretidir. Dolayısıyla referans kategori kadındır, erkeğin ücreti kadına göre tanımlanmaktadır. Bu ilişkinin grafiği basamak şeklindedir.

Şekil 5.1: Kadın ve Erkeklerin Ortalama Ücretleri: Açıklayıcı Kukla Değişken



Kullanılacak veriler aşağıdaki gibidir.

Kişi	Y	D
1	1500	1
2	1300	0
3	1000	0
4	1200	1
5	1750	1
⋮	⋮	⋮
100	2000	1

Yapılan tahmin sonucu

$\hat{Y}_i = 1100 + 412.5D_i$
t (21.8) (9.52)

bulunmuştur. Kadınların ortalama aylık ücreti 1100 TL, erkeklerinki 1100+412.5=1512.5 TL.dir. β_1 t testinde anlamlı bulunduğundan kadın-erkek ücret farkı istatistiksel olarak anlamlıdır.

Örnek 5.6: Hem kukla hem de niceliksel açıklayıcı değişken içeren bir model, önceki örneğe deneyim yıl sayısının (X) eklendiği bir örnekle açıklanabilir:

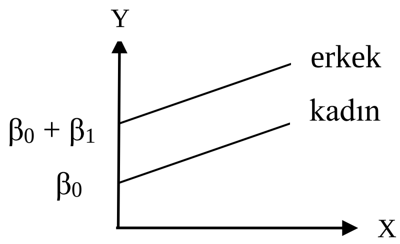
$Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + \beta_2 X_i + u_i$

Bu modelde bir kadın çalışanın ücreti $E(Y|X, D=0) = \beta_0 + \beta_2 X_i$,

bir erkek çalışanın ücreti $E(Y|X, D=1) = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 X_i$ dir.

Grafik olarak aynı eğim fakat farklı başlangıç noktalarına sahip iki eğri söz konusudur.

Şekil 5.2: Kadın ve Erkeklerin Ortalama Ücretleri: Açıklayıcı Kukla ve Niceliksel Değişken



Tahmin sonucu aşağıdaki sonuçların elde edildiğini düşünelim

$\widehat{Y}_i = 920.2 + 312.6 D_i + 150.3 X_i$

t (31.7) (11. 2) (12.4)

Bu sonuçlara göre 0 deneyim yılına sahip bir kadının aylık ücreti 920.2 TL, 0 deneyim yılına sahip bir erkeğin aylık ücreti 920.2 + 312.6 = 1232.8 TL'dir. Deneyim yılı 1 yıl arttığında aylık ücret 150.3 TL artar. β_1 t testinde anlamlı bulunduğuna göre kadın-erkek ortalama ücret farkı istatistiksel olarak anlamlıdır.

5.2.2 Eğim Kuklası

Örnek 5.7: Eğimin kadın ve erkek için farklılaştığının düşünüldüğü durumlarda kullanılır. Sabit terim aynıyken model aşağıdaki gibidir:

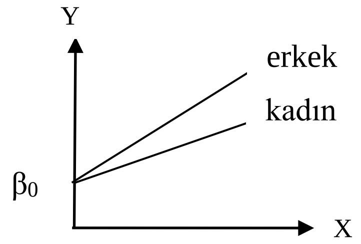
$Y_i = \beta_0 + \beta_2 X_i + \beta_3 (D_i * X_i) + u_i$

Bu modelde bir kadın çalışanın ücreti $E(Y|X, D=0) = \beta_0 + \beta_2 X_i$,

bir erkek çalışanın ücreti $E(Y|X, D=1) = \beta_0 + (\beta_2 + \beta_3) X_i$ dir.

Grafik olarak bu model aynı başlangıç noktaları fakat farklı eğimler verir. Eğimler arasındaki fark β_3 kadardır.

Şekil 5.3: Kadın ve Erkeklerin Ortalama Ücretleri: Eğim Kuklası



Örnek 5.8: Hem sabitin hem de eğimin kadın ve erkek için farklılaştığının düşünüldüğü durumlarda aşağıdaki gibi bir model kurulabilir.

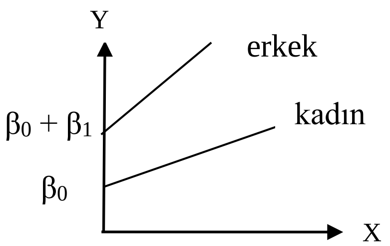
$Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + \beta_2 X_i + \beta_3(D_i{*}X_i) + u_i$

Bu modelde bir kadın çalışanın ücreti $E(Y|X, D=0) = \beta_0 + \beta_2 X_i$,

bir erkek çalışanın ücreti $E(Y|X, D=1) = (\beta_0 + \beta_1) + (\beta_2 + \beta_3)X_i$ dir.

Grafik olarak bu model farklı başlangıç noktaları ve farklı eğimler verir. Kadın ve erkek sabitleri arasındaki fark β_1, eğimler arasındaki fark β_3 kadardır.

Şekil 5.4: Kadın ve Erkeklerin Ortalama Ücretleri: Sabit ve Eğim Kuklaları



Diğer türevler:

Erkek olmanın etkisi: $dY/d(D=1) = \beta_1 + \beta_3 X_i$

Erkek için deneyimin etkisi: $dY/dX = \beta_2 + \beta_3$

5.2.3 Mevsim Kuklası

Ekonomi ile ilgili pek çok değişken mevsimlik etkiler gösterir. Üç aylık veya aylık verilerin kullanıldığı modellerde bu tür kuklalar kullanılır. Örneğin kış aylarının getirdiği bazı değişiklikler dördüncü dönem için bir kukla ile temsil edilebilir.

Örnek 5.9: İmalat sanayinde firma karlarının (K) bağımlı değişken, satışların (S) açıklayıcı değişken olduğu bir model 3 aylık verilerle tahmin edilecektir. Ayrıca mevsimlik etkiler için sabit kuklası kullanılacaktır:

$K_t = \beta_0 + \beta_1 S_t + \beta_2 D_2 + \beta_3 D_3 + \beta_4 D_4 + u_t$

Kuklalar şu şekilde tanımlanmıştır:
D_2: İkinci çeyrekte 1, diğerlerinde 0 değerini alır.
D_3: Üçüncü çeyrekte 1, diğerlerinde 0 değerini alır.
D_4: Dördüncü çeyrekte 1, diğerlerinde 0 değerini alır.

Bu modelde ortalama kar düzeyleri birinci çeyrekte $\beta_0 + \beta_1 S_t$,
ikinci çeyrekte $(\beta_0 + \beta_2) + \beta_1 S_t$,
üçüncü çeyrekte $(\beta_0 + \beta_3) + \beta_1 S_t$
dördüncü çeyrekte $(\beta_0 + \beta_4) + \beta_1 S_t$'dir.

Referans kategori birinci çeyrektir. Diğer mevsimlerin etkileri birinci çeyreğe göre tanımlanır. Mevsimlik etkiler eğim kuklası ile de gösterilebilir.

Örnek 5.10: Örnek 5.9'a eğim kuklaları da ekleyelim:

$K_t = \beta_0 + \beta_1 S_t + \beta_2 D_2 + \beta_3 D_3 + \beta_4 D_4 + \beta_5(D_2 * S_t) + \beta_6(D_3 * S_t) + \beta_7(D_4 * S_t) + u_t$

Bu modelde ortalama kar düzeyleri birinci çeyrekte $\beta_0 + \beta_1 S_t$,
ikinci çeyrekte $(\beta_0 + \beta_2) + (\beta_1 + \beta_5) S_t$,
üçüncü çeyrekte $(\beta_0 + \beta_3) + (\beta_1 + \beta_6) S_t$
dördüncü çeyrekte $(\beta_0 + \beta_4) + (\beta_1 + \beta_7) S_t$'dir.

5.2.4 Kukla Değişken Tuzağı

Diyelim ki D1 Örnek 5.5'de tanımlandığı gibi çalışanın kadın olması durumunda 0, erkek olması durumunda 1 değerini alan bir kukla olsun. Ayrıca yeni bir kukla tanımlayalım. D_2 çalışanın erkek olması durumunda 0, kadın olması durumunda 1 değerini alan bir kukla olsun.

D_1 1-D_2'dir: D_1'in 1 olduğu durumda D_2 her zaman 0, D_1'in 0 olduğu durumda D_2 her zaman 1'dir. D_1 ve D_2 arasında doğrusal ilişki vardır. Denklemde ayrıca bir de sabit terim varsa kukla değişken tuzağına düşülür ve tahmin yapılamaz. Benzer bir şekilde dört çeyreği içeren mevsimlik kuklaların tümü birden denkleme eklenirse kukla değişken tuzağına düşülür. Her zaman bir kukla kategorisi dışarıda bırakılmalıdır.