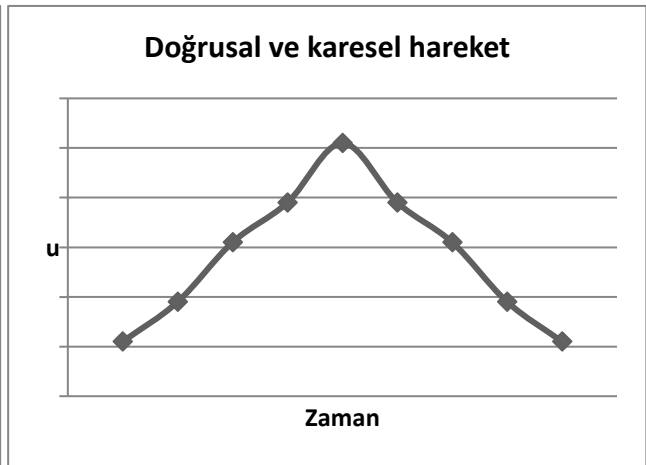
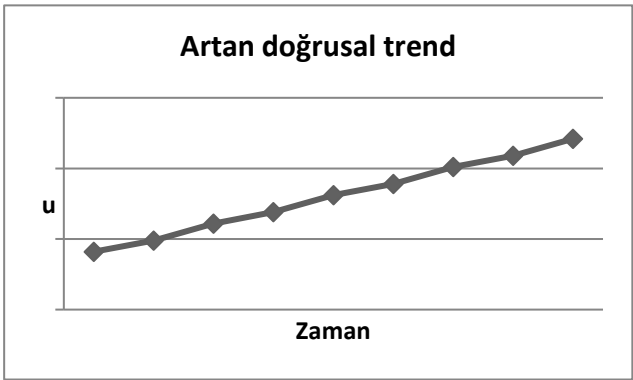
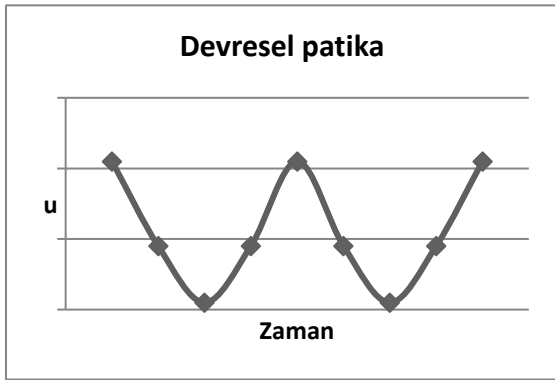


9. ARDIŞIK BAĞIMLILIK SORUNU (AUTOCORRELATION)

9.1. Ardışık Bağımlılık Sorunu Nedir?

Ardışık bağımlılık sorunu, hata terimleri arasında ilişki olmadığı ($E(u_i, u_j) = 0$, $i \neq j$) varsayımının geçerli olmamasıdır. Diğer bir deyişle hata terimleri arasında ilişki vardır: $E(u_i, u_j) \neq 0$, $i \neq j$.

Hata terimleri zaman içinde aşağıdaki gibi hareket edebilir.



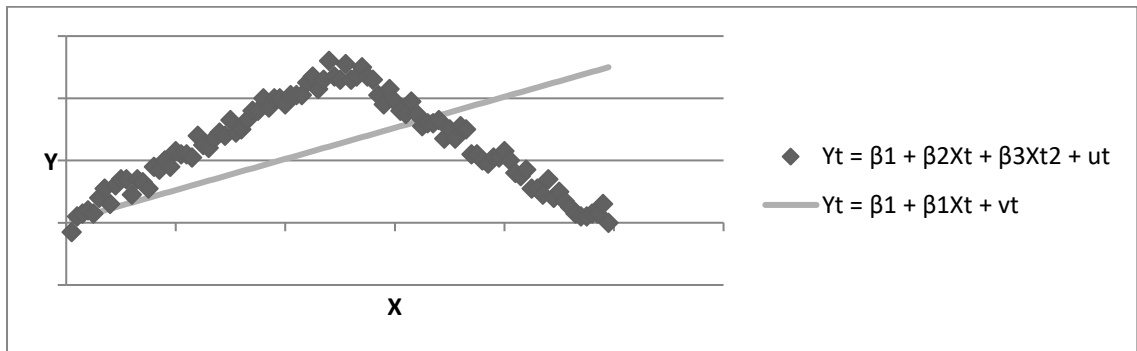
Ardışık bağımlılık olmaması durumunda hata terimlerinin zaman içindeki seyrinde bir sistematik şekil yoktur (bkz. son grafik). Ancak diğer grafiklerde olduğu gibi hata terimi bir şekil içeriyorsa ardışık bağımlılık sorunu söz konusudur.

Matrisler cinsinden gösterecek olursak, $Y = X\beta + u$ genel doğrusal modelinde ardışık bağımlılık sorunu, $\text{Var, Cov}(u) = E(uu') = \sigma^2 I$ olmayıp aşağıdaki gibi olmasıdır.

$$\text{Var, Cov}(u) = E(uu') = \sigma^2 P = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & 1 & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Ardışık bağımlılık sorunu genellikle zaman serisi verileriyle tahmin yapıldığında ortaya çıkar. Ardışık bağımlılığın bazı nedenleri aşağıdaki gibidir.

- i) Zaman serilerinde, özellikle trend içermeleri durumunda hata terimleri arasında bir ilişki olması beklenir. Bu tür verilerde devresel hareketler olur, bir momentum vardır ve bu durum değişkenlerin kendileri ile ilişkili olmalarına neden olur. Bir dönemde hata yüksekse diğer dönemde de yüksek olur vb.
- ii) Denklemden bulunması gerektiği halde yer almayan değişkenler olması durumunda da bu sorun ortaya çıkabilir. Örneğin aslında $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$ denklemi tahmin edilmesi gerektiği halde $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + v_t$ tahmin edildi diyelim. Bu durumda v_t X_3 'ün etkilerini içerecektir. Çünkü $v_t = \beta_3 X_{3t} + u_t$ dir. Eğer X_3 Y 'yi etkiliyorsa v bir sistematik şekil içerir.
- iii) Denklemin matematiksel biçimi yanlış belirlenmişse de ardışık bağımlılık sorunu ortaya çıkabilir. Örneğin model karesel ($Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_t^2 + u_t$) iken doğrusal bir model ($Y_t = \beta_1 + \beta_1 X_t + v_t$) tahmin edilmiş olsun. Bu durumda hata terimi matematiksel biçim hatasını da içerir. Örneğin grafikte hatalar (karesel ilişkiyi gösteren noktalar ile tahmin edilen denklemleri gösteren düz çizgi arasındaki fark) önce artmakta sonra azalmaktadır.



- iv) Yapısal değişimlik de hata terimlerini ardışık bağımlı yapabilir.
- v) Bağımlı değişkende sistematik ölçme hataları da ardışık bağımlılığa neden olabilir.

5.1.1 Ardışık Bağımlılık Süreçleri

Ardışık bağımlılık, hata terimlerini üreten iki farklı süreç nedeniyle ortaya çıkabilir.

Bunlardan birincisi **otoregresif (autoregressive) süreçtir**. Kısaca AR ile gösterilir.

Eğer t dönemindeki hata terimi sadece t-1 dönemindeki hata terimi ile ilişkili ise AR(1) süreci söz konusudur:

$$\text{AR}(1): u_t = \rho u_{t-1} + e_t$$

Burada ρ otokovaryans katsayısı ($|\rho| < 1$), e_t beklenen değeri 0, varyansı sabit ve ardışık bağımlı olmayan hata terimidir¹.

AR sürecinde gecikme sayısı ardışık bağımlılığın derecesini gösterir. AR(1) süreci birinci derece ardışık bağımlılığa neden olmaktadır. Yine bu süreçte ρ katsayısı, hata terimleri arasındaki ilişkinin yönünü gösterir. Eğer $\rho > 0$ ise artı birinci derece ardışık bağımlılıktan, $\rho < 0$ ise eksi birinci derece ardışık bağımlılıktan söz edilir.

Eğer t dönemindeki hata terimi iki dönem gecikmeli hata terimi ile de ilişkili ise AR(2) süreci geçerlidir:

$$\text{AR}(2): u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + e_t$$

Bu durumda hata terimleri arasında birinci ve ikinci derece ardışık bağımlılık vardır. Burada ρ_1 birinci derece, ρ_2 ikinci derece ardışık bağımlılığın işaretini gösterir. Örneğin $\rho_1 < 0$, $\rho_2 > 0$ ise eksi birinci derece, artı ikinci derece ardışık bağımlılık vardır. Hata terimi e_t yine tüm ideal varsayımları sağlamaktadır.

Daha genel olarak AR(m) aşağıdaki gibidir.

$$\text{AR}(m): u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \dots + \rho_m u_{t-m} + e_t$$

¹ $|\rho| < 1$ koşulu hata terimi varyansının sonsuza gitmemesi için gereklidir.

Ardışık bağımlılığa neden olabilecek ikinci tür bir süreç **hareketli ortalamalar (moving average) sürecidir**. Kısaca MA ile gösterilir. Birinci, ikinci, ve m'inci derece ardışık bağımlılığa neden olan MA süreçleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$MA(1): u_t = e_t + \lambda e_{t-1}$$

$$MA(2): u_t = e_t + \lambda_1 e_{t-1} + \lambda_2 e_{t-2}$$

$$MA(m): u_t = e_t + \lambda_1 e_{t-1} + \lambda_2 e_{t-2} + \dots + \lambda_m e_{t-m}$$

Burada ardışık bağımlılığın işareti λ katsayısı ($|\lambda| < 1$) tarafından belirlenir. Örneğin MA(2) sürecinde $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ ise artı birinci derece, eksi ikinci derece ardışık bağımlılık vardır. Buradaki ifadelerde yer alan e_t ise yine beklenen değeri 0, varyansı sabit ve ardışık bağımlı olmayan hata terimidir.

Ardışık bağımlılık AR ve MA süreçleri yanında ikisinin bir bileşimi olarak da karşımıza çıkabilir. Böyle bir süreç **otoregresif hareketli ortalamalar (autoregressive moving average) süreci** olarak adlandırılır ve kısaca ARMA ile gösterilir. AR(p) ve MA(q) sürecinin bileşiminden oluşan ARMA(p,q) süreci aşağıdaki gibidir.

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \dots + \rho_p u_{t-p} + e_t + \lambda_1 e_{t-1} + \lambda_2 e_{t-2} + \dots + \lambda_q e_{t-q}$$

Örneğin ARMA(2,3) süreci aşağıdaki gibidir.

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + e_t + \lambda_1 e_{t-1} + \lambda_2 e_{t-2} + \lambda_3 e_{t-3}$$

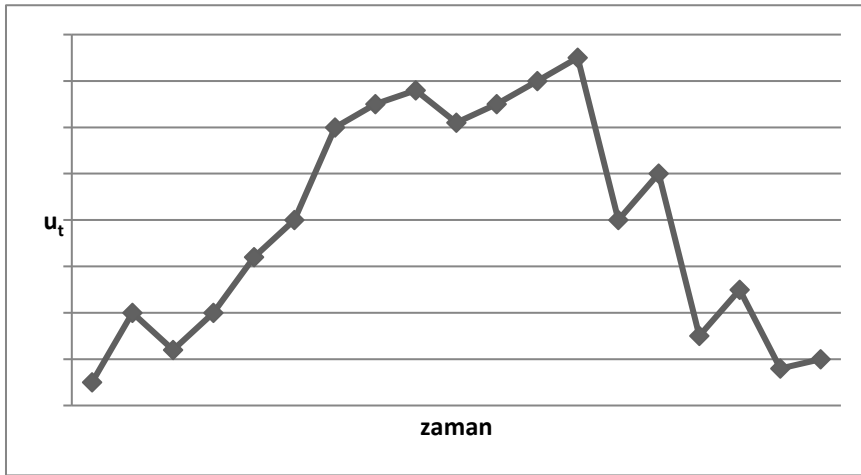
9.2. Ardışık Bağımlılık Sorunu EKK Tahmin Edicilerini Nasıl Etkiler?

1. Ardışık bağımlılık sorunu varken EKK sapmasızlık özelliğini korur.
2. Ancak etkinlik özelliğini kaybeder.
3. Hata terimlerinin varyansının (σ_u^2) tahmin edicisi $\frac{\sum \hat{u}_t^2}{n-k}$ aşağı doğru sapmalı olur. Dolayısıyla $\text{Var}(\hat{\beta}_j)$ aşağı doğru, t istatistikleri yukarı doğru sapmalı olur. Benzer bir şekilde R^2 ve F istatistiği de yukarı doğru sapmalıdır.

9.3. Ardışık Bağımlılık Sorununun Varlığı Saptanabilir mi?

9.3.1. Grafik incelemesi

i. Hata terimi tahminlerinin (\hat{u}_t) zaman içindeki seyri ardışık bağımlılığın varlığı ile ilgili bir gösterge olabilir. Hata terimleri tahmini (\hat{u}_t) hata terimlerine (u_t) eşit olmamakla beraber hata terimlerinin şekli ile ilgili bir ipucu verebilir. Aşağıdaki şekil bir ardışık bağımlılık sorunu olduğunu göstermektedir.



ii. Hata terimi tahminlerinin (\hat{u}_t) ile (\hat{u}_{t-1}) arasındaki ilişkiyi gösteren grafik de ardışık bağımlılık ile ilgili fikir verebilir. Aşağıdaki grafik de ardışık bağımlılığa işaret etmektedir.

