9. ARDIŞIK BAĞIMLILIK SORUNU (devam)

9.3. Ardışık Bağımlılık Sorununun Varlığı Saptanabilir mi? (devam)

9.3.2. Durbin-Watson Test'i

Birinci derece ardışık bağımlılık sorununun AR(1) süreci ile ortaya çıktığını varsayalım:

$u_t = \rho u_{t-1} + e_t$

Bu ilişkideki ρ katsayısı için H_0: ρ=0, (H_1: ρ≠0) hipotezini test ederek ardışık bağımlılık sorunu test edilebilir. Bu hipotezi test etmek için kullanılacak test istatistiği (DW) aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\mathrm{DW} = \frac{\sum_{t=2}^{t=n}(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{t=n}(\hat{u}_t)^2}$$

DW testinin arkasında aşağıdaki varsayımlar yatmaktadır:

1- Regresyon modeli sabit terim içerir,
2- Hata terimleri AR(1) süreci ile üretilmiştir.
3- Regresyon modelinde açıklayıcı değişkenler arasında gecikmeli bağımlı değişken yoktur.
4- Verilerde eksik gözlem yoktur. Örneğin 1985-2014 arası veri ile tahmin yapıyorsak bu dönem içindeki bir veya daha fazla yıl (örneğin 1988 ve 2001) eksik değildir.

DW istatistiği ρ'nun tahmini olan $\hat{\rho}$ cinsinden yazılabilir.

$$\mathrm{DW} = \frac{\sum \hat{u}_t^2 + \sum \hat{u}_{t-1}^2 - 2\sum \hat{u}_t\ \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2}$$

$\sum \hat{u}_t^2$ ile $\sum \hat{u}_{t-1}^2$ arasında yalnızca bir gözlemlik fark olduğu için birbirlerine yaklaşık olarak eşittirler. Dolayısıyla DW yeniden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathrm{DW} \cong \frac{2\sum \hat{u}_t^2 - 2\sum \hat{u}_t\ \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2} = 2\left(1 - \frac{\sum \hat{u}_t\ \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2}\right)$$

Diğer yandan $\rho = Cov(u_t, u_{t-1})/Var(u_t)$ olduğundan

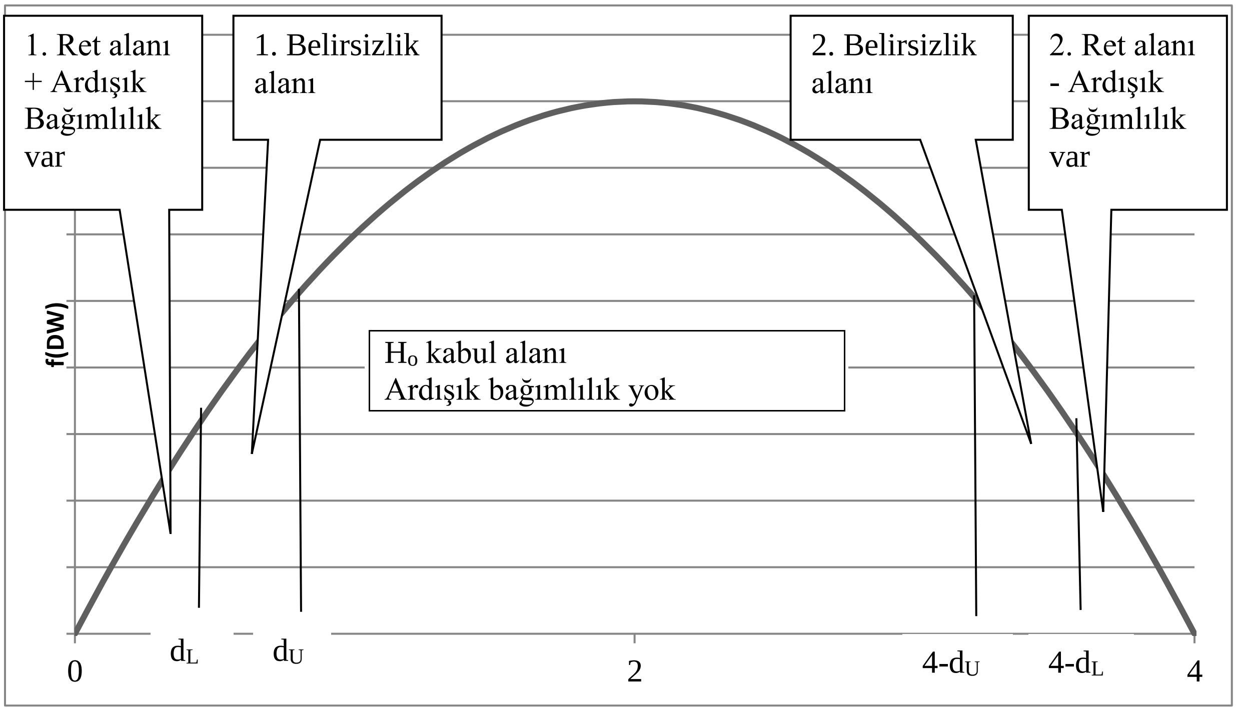
$$\hat{\rho} = \frac{\sum(\hat{u}_t - \bar{u}_t)(\hat{u}_{t-1} - \bar{u}_{t-1})}{\sum(\hat{u}_t - \bar{u}_t)^2} = \frac{\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^{\,2}}$$

Bu durumda DW aşağıdaki gibi bulunur.

$$DW \cong 2(1 - \hat{\rho})$$

DW'ın ρ ile olan ilişkisi bu istatistiğin alabileceği değerlerle ilgili fikir verebilir. Hatırlanacağı gibi $-1<\rho<1$ dir. Eğer $\rho = -1$ ise (eksi ardışık bağımlılık) DW = 4, $\rho = 0$ ise (ardışık bağımlılık yok) DW = 2 ve $\rho = 1$ ise (artı ardışık bağımlılık) DW = 0 bulunur. Demek ki DW istatistiği 0 ile 4 arasında değerler almaktadır (0<DW<4) ve beklenen değeri 2 dir (E(DW)=2).

H_0: $\rho=0$, H_1: $\rho\neq0$ hipotezinin testinde hesaplanan DW değeri tablo değeri ile karşılaştırılmalıdır. Aşağıdaki grafik kabul, ret ve belirsizlik alanlarını göstermektedir.



$0 \leq DW_h < d_L$ ise DW_h 1. Ret alanındadır. H_0 reddedilir. Artı birinci derece ardışık bağımlılık sorunu vardır.

$d_L \leq DW_h \leq d_U$ ise DW_h 1. Belirsizlik alanındadır. H_0'ın reddi veya kabulu konusunda bir karar verilemez.

$d_U \leq DW_h \leq 4\text{-}d_U$ ise DW_h Kabul alanındadır. H_0 kabul edilir. Artı veya eksi ardışık bağımlılık sorunu yoktur.

$4 - d_U \leq DW_h \leq 4-d_L$ ise DW_h 2. Belirsizlik alanındadır. H_0'ın reddi veya kabulu konusunda yine bir karar verilemez.

$4-d_L \leq DW_h < 4$ ise DW_h 2. Ret alanındadır. H_0 reddedilir. Artı eksi birinci derece ardışık bağımlılık sorunu vardır.

Daha önce de belirtildiği gibi DW testi sabit terim olan denklemler için kullanılabilir. Eğer tahmin ettiğimiz denklemde sabit terim yoksa sabit terim ekleyerek yeniden tahmin edilmeli ve test uygulanmalıdır.

Ayrıca denklemde gecikmeli bağımlı değişken varsa da bu test uygulanamamaktadır. Böyle bir durumda Durbin bir **h istatistiği** önermiştir.

$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \ldots + \beta_k X_{kt} + \gamma Y_{t-1} + u_t$

modeli için h istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1 - n\widehat{Var(\hat{\gamma})}}}$$

$DW \cong 2(1 - \hat{\rho})$ ve böylece $\hat{\rho} \cong 1 - (DW/2)$ olduğundan h istatistiği aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$h = \left\{1 - \left(\frac{DW}{2}\right)\right\}\sqrt{\frac{n}{1 - n\widehat{Var(\hat{\gamma})}}}$$

Burada $n\widehat{Var(\hat{\gamma})}$ denklemin sağ tarafında yer alan gecikmeli bağımlı değişkenin katsayısının varyansının tahminidir. Eğer varyans yüksekse ve $n\widehat{Var(\hat{\gamma})} > 1$ bulunuyorsa bu test kullanılamaz.

Bu testte de H_0: $\rho=0$, H_1: $\rho\neq0$ hipotezi test edilmektedir. Hesaplanan h istatistiği yaklaşık olarak standart normal dağılıma sahiptir. Bu nedenle hesaplanan değer standart normal dağılım tablosu ile karşılaştırılmalıdır. Eğer $|h|>z^*$ ise (burada z^* kritik değerdir) H_0 reddedilir, ardışık bağımlılık sorunu vardır. Yüzde 5 anlamlılık düzeyinde z^* kritik değeri 1.96'dır.

9.3.3. Breusch-Godfrey LM Test'i

Durbin Watson yalnızda birinci derece ardışık bağımlılığı ve yalnızca AR sürecini dikkate almaktadır. Ayrıca denklemde sabit terim yoksa veya gecikmeli bağımlı değişken varsa kullanılamamaktadır. Yine Durbin'in önerdiği h testi gecikmeli bağımlı değişkenin varyansı yüksek ise yine kullanılamamaktadır. Bu sınırlamaları aşan, daha yüksek dereceden ve örneğin MA sürecini de dikkate alan daha genel bir test, Breusch ve Godfrey tarafından geliştirilen LM Test'idir.

Testte öncelikle asıl denklem tahmin edilerek aşağıdaki adımlar izlenmelidir.

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \ldots + \beta_k X_{kt} + u_t$$

1- Asıl denklem tahmininden hata tahminleri bulunur: $\hat{u}_t$

2- Hata tahminlerinin bağımlı değişken olduğu aşağıdaki yardımcı denklem tahmin edilir:

$$\hat{u}_t = \beta_1 + \beta_1 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + d_1 \hat{u}_{t-1} + d_2 \hat{u}_{t-2} + \cdots + d_p \hat{u}_{t-p} + w_t$$

Burada dikkat edilecek bir nokta gecikmeler nedeniyle gözlem sayısının n-p olmasıdır.

Bu yardımcı denklem için R^2 hesaplanır. Buna R_Y^2 diyelim.

3- Bu testte boş hipotez ardışık bağımlılığın olmamasıdır:

H_0: AR(m), MA(m) veya ARMA(p,q) ilişkisi yok

H_1: AR(m), MA(m) veya ARMA(p,q) ilişkisi var

R_Y^2 nin gözlem sayısı (n-p) ile çarpımı asimptotik olarak ki-kare dağılımına sahiptir ve serbestlik derecesi yardımcı denklemde yer alan gecikme sayısıdır.

$(n-p)R_Y^2 \sim \chi^2(p)$

4- Eğer hesaplanan χ^2 değeri tablo değerinden büyükse H_0 reddedilir. Yani ardışık bağımlılık sorunu var demektir. Eğer büyük değilse ardışık bağımlılık sorunu yoktur.

LM yönteminde herhangi bir derece ardışık bağımlılık test edilebilir. Örneğin

1. derece için $\hat{u}_t = \beta_1 + \beta_1 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + d_1 \hat{u}_{t-1} w_t$ (p=1)

4. derece için $\hat{u}_t = \beta_1 + \beta_1 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + d_1 \hat{u}_{t-4} w_t$ (p=1)

1. den 4. dereceye kadar için

$$\hat{u}_t = \beta_1 + \beta_1 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + d_1 \hat{u}_{t-1} + d_2 \hat{u}_{t-2} + d_3 \hat{u}_{t-3} + d_4 \hat{u}_{t-4} \quad \text{(p=4)}$$

1., 2. ve 4. derece için $\hat{u}_t = \beta_1 + \beta_1 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + d_1 \hat{u}_{t-1} + d_2 \hat{u}_{t-2} + d_4 \hat{u}_{t-4}$ (p=3)

yardımcı denklemleri tahmin edilir.

9.4. Ardışık Bağımlılık Sorununun Çözümü Var mıdır?

Ardışık bağımlılık dışlanan değişken, matematiksel kalıp hatası veya yapısal değişiklik gibi bir nedenden kaynaklanıyorsa bu sorunların çözülmesi, örneğin dışlanan değişkenin modele eklenmesi, modelin doğru olarak tanımlanması veya yapısal değişikliğin dikkate alınması çözüm olabilir. Eğer bu önlemler çözüm olmuyorsa aşağıdaki yöntemler izlenmelidir.

9.4.1. Ardışık bağımlılığın yapısı ve ρ biliniyorsa: GEKK Yöntemi

Daha önce de belirtildiği gibi, GEKK yöntemi asıl denklemden bir dönüştürülmüş denklem elde edip bu dönüştürülmüş denklemi EKK ile tahmin etmek anlamına gelir.

$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \ldots + \beta_k X_{kt} + u_t$ asıl denklemimiz olsun ve birinci dereceden ardışık bağımlılık olduğunu varsayalım: $u_t = \rho u_{t-1} + e_t$. e_t beklenen değeri 0, varyansı sabit ve ardışık bağımlı olmayan hata terimidir.

Bu durumda dönüştürme için asıl denklemin bir gecikmesini alıp ρ ile çarpalım.

$$\rho Y_{t-1} = \rho\beta_1 + \beta_2 \rho X_{2t-1} + \beta_3 \rho X_{3t-1} + \ldots + \beta_k \rho X_{kt-k} + \rho u_{t-1}$$

asıl denklem ile bu denklemin farkı aşağıdaki gibidir:

$$(Y_t - \rho Y_{t-1}) = \beta_1 (1-\rho) + \beta_2 (X_{2t} - \rho X_{2t-1}) + \beta_3 (X_{3t} - \rho X_{3t-1}) + \ldots + \beta_k (X_{kt} - \rho X_{kt-k}) + (u_t - \rho u_{t-1})$$

veya

$Y_t^* = \beta_1^* + \beta_2 X_{2t}^* + \beta_3 X_{3t}^* + \ldots + \beta_k X_{kt}^* + e_t$

Burada $Y_t^* = (Y_t - \rho Y_{t-1})$, $\beta_1^* = \beta_1 (1-\rho)$, $X_{it}^* = (X_{it} - \rho X_{it-1})$ ve $e_t = (u_t - \rho u_{t-1})$ dir. Bu dönüştürme ile elde edilen hata terimi tüm ideal varsayımları sağladığından dönüştürülmüş denkleme EKK uygulanması ardışık bağımlılık sorununu çözer.

8.4.2. ρ bilinmiyorsa

GEKK yönteminin uygulanabilmesi için ρ değerinin bilinmesi gerekir. Ancak ρ değeri genellikle bilinmez, tahmin edilmesi gerekir. Bu değerin nasıl tahmin edileceğine bağlı olarak iki farklı GEKK uygulaması vardır.

i- Cochrane-Orkutt Yöntemi

Cochrane-Orkutt yöntemi bir yineleme yöntemidir.

1- Öncelikle asıl denklemin ($Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \ldots + \beta_k X_{kt} + u_t$) tahmini sonucu hata terimleri tahminleri elde edilir: $\hat{u}_t$ ($\hat{u}_t = Y_t - \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2t} + \ldots + \hat{\beta}_k X_{kt}$)

2- Bu tahminler kullanılarak $\hat{u}_t = \rho\hat{u}_{t-1} + v_t$ tahmin edilir ve $\hat{\rho}$ bulunur. Buna ${}^1\hat{\rho}$ diyelim.

3- Elde edilen değerle

$(Y_t - {}^1\hat{\rho}Y_{t-1}) = \beta_1(1 - {}^1\hat{\rho}) + \beta_2(X_{2t} - {}^1\hat{\rho}X_{2t-1}) + \ldots + \beta_k(X_{kt} - {}^1\hat{\rho}X_{kt-k}) + (u_t - {}^1\hat{\rho}u_{t-1})$

denklemi tahmin edilir. Bu tahminde kullanılan ${}^1\hat{\rho}$ değerlerinin ρ'nun iyi bir tahmini olduğu önceden bilinemediğinden son denklemden elde edilen katsayı tahminlerine de (${}^1\hat{\beta}_i$) güvenmek mümkün değildir. Bu nedenle katsayı tahminlerini asıl denklemde yerine koyarak bu denklemin hata tahminleri hesaplanır:

${}^1\hat{u}_t = Y_t - {}^1\hat{\beta}_1 + {}^1\hat{\beta}_2 X_{2t} + \ldots + {}^1\hat{\beta}_k X_{kt}$

4- Elde edilen hata terimleri ile ${}^1\hat{u}_t = \rho\, {}^1\hat{u}_{t-1} + w_t$ denklemi tahmin edilir. Bulunan katsayıya ${}^2\hat{\rho}$ diyelim.

5- Üçüncü maddedeki yöntemle yine hata terimleri tahminlerini bulalım: ${}^2\hat{u}$.

Bu şekilde devam ettiğimizde ρ tahminleri arasındaki fark çok küçük (örneğin 0.005'den küçük) bir değer almışsa yineleme durdurulur.

ii- İki aşamalı Durbin Yöntemi

Bu yöntem iki aşamadan oluşmaktadır.

1- Birinci aşamada öncelikle aşağıdaki dönüştürülmüş denklem tahmin edilir.

$$Y_t = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(X_{2t} - \rho X_{2t-1}) + \ldots + \beta_k (X_{kt} - \rho X_{kt-k}) + \rho Y_{t-1} + e_t$$

Y_{t-1}'in katsayısı tahmin edilen değerini ρ'nun tahmini olarak ele alalım: $\hat{\rho}$

2- İkinci aşamada, birinci aşamada bulunan $\hat{\rho}$ değeri kullanılarak $Y_t^* = (Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1})$, $\beta_1^* = \beta_1(1-\hat{\rho})$, $X_{it}^* = (X_{it} - \hat{\rho}X_{it-1})$ ve $e_t = (u_t - \hat{\rho}u_{t-1})$ tanımları yapılarak aşağıdaki dönüştürülmüş denklem tahmin edilir.

$$Y_t^* = \beta_1^* + \beta_2 X_{2t}^* + \ldots + \beta_k X_{kt}^* + e_t$$

Bu denklemin hata terimi e_t tüm ideal varsayımları sağladığından dönüştürülmüş denkleme EKK uygulanması ardışık bağımlılık sorununu çözer.