AKT102 İSTATİSTİK

BÖLÜM 4

KESİKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI

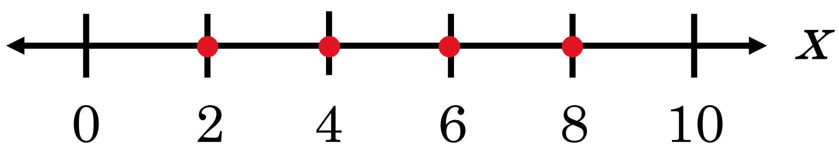
§ 4.1

Olasılık Dağılımları

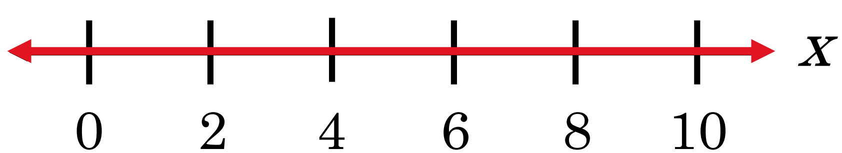
Rasgele Değişken

Bir X rasgele değişkeni (r.d), olasılık dağılımının her sonucuyla ilişkili sayısal bir değeri temsil eder..

Rasgele değişken, listelenebilecek sonlu veya sayılabilir bir olası sonuç sayısına sahipse, kesiklidir.



Sayı doğrusunda aralıklarla temsil edilen, sayılamayan bir sayı varsa, rasgele değişken süreklidir.



Rasgele Değişken

Örnek:

X rasgele değişkenin kesikli mi yoksa sürekli mi olduğuna karar verin.

a.) Arabanızın bir benzin deposuyla gittiği mesafe

Arabanızın kat ettiği mesafe sürekli rasgele değişkendir çünkü sayılamayan bir ölçümdür. (Tüm ölçümler sürekli rasgele değişkenlerdir.)

b.) İstatistik sınıfındaki öğrenci sayısı

Öğrenci sayısı kesikli rasgele değişkendir çünkü sayılabilir.

Kesikli Olasılık Dağılımları

Kesikli olasılık dağılımı, rasgele değişkenin olasılığı ile birlikte alabileceği her olası değeri listeler. Bir olasılık dağılımı aşağıdaki koşulları sağlamalıdır.

Açıklama	*Gösterim*
1. Kesikli rasgele değişkenin her değerinin olasılığı 0 ile 1 arasındadır.	$0 \le P(x) \le 1$
2. Tüm olasıklar toplamı 1'e eşittir.	$\Sigma P(x) = 1$

Kesikli Olasılık Dağılımı Oluşturma

Kılavuz

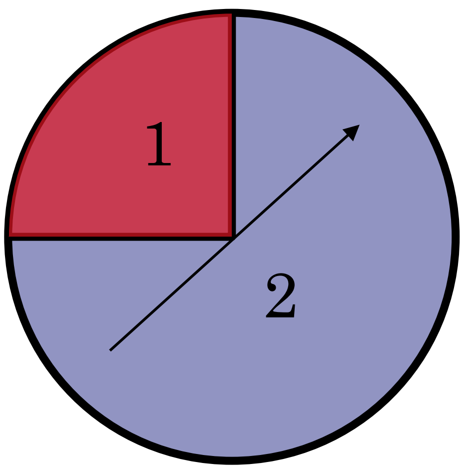
$X\,, x_1,\ x_2, \ldots, \ x_n$ sonuçlarıyla kesikli r.d olsun

1. Olası sonuçlar için bir frekans dağılımı yapın.
2. Frekansların toplamını bulun.
3. Frekansları, frekansların toplamına bölerek olası her sonucun olasılığını bulun.
4. Her olasılığın 0 ile 1 arasında olduğunu ve toplamın 1 olduğunu kontrol edin.

Kesikli Olasılık Dağılımı Oluşturma

Örnek:

Aşağıdaki iki bölüme ayrılmış alandan 1 nolu yere inme olasılığı 0.25; 2 nolu yere inme olasılığı 0.75 olsun. x üzerine inilen yerin sayısı ise X rasgele değişkeni için bir olasılık dağılımı oluşturun.



x	$P(x)$
1	0.25
2	0.75

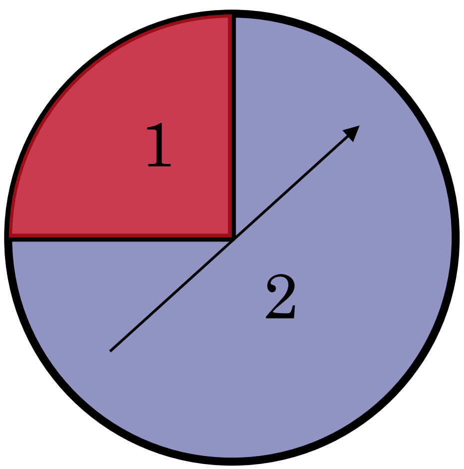
Her olasılık 0 ile 1 arasında

Toplamları 1 olmalı.

Kesikli Olasılık Dağılımı Oluşturma

Örnek:

Aşağıdaki iki bölüme ayrılmış alan iki kez döndürülsün. 1'e iniş olasılığı 0.25. 2'ye iniş olasılığı 0.75'tir. X, iki dönüşün toplamı olsun. X rasgele değişkeni için bir olasılık dağılımı oluşturun.

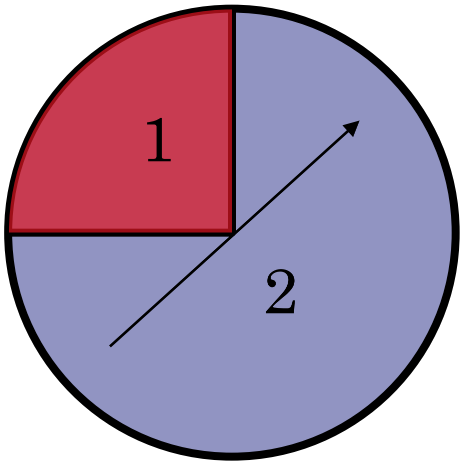


Olası toplamlar 2, 3 ve 4.

$$P(\text{toplam}=2) = \underbrace{0.25}_{\text{İlk dönmede 1 nolu alan.}} \underbrace{\times}_{\text{“ve”}} \underbrace{0.25}_{\text{İkinci dönmede 1 nolu alan.}} = 0.0625$$

Kesikli Olasılık Dağılımı Oluşturma

Örneğin devamı:



$$P(\text{toplam=3}) = 0.25 \times 0.75 = 0.1875$$

İlk dönmede 1.alan — "ve" — İkinci dönmede 2.alan

"veya"

$$P(\text{toplam=3}) = 0.75 \times 0.25 = 0.1875$$

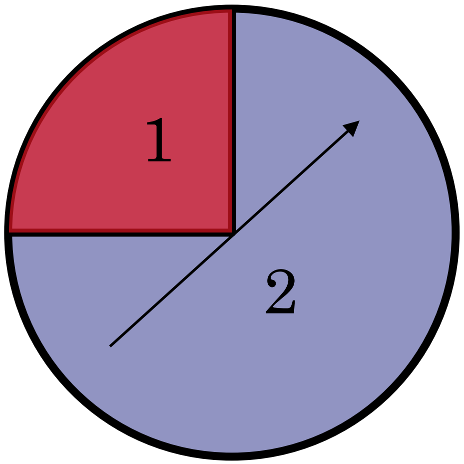
İlk dönmede 2.alan — "ve" — İkinci dönmede 1.alan

toplam x	$P(x)$
2	0.0625
3	0.375
4	

$0.1875 + 0.1875$

Kesikli Olasılık Dağılımı Oluşturma

Örneğin devamı:



$P(\text{toplam}=4) = 0.75 \times 0.75 = 0.5625$

İlk dönmede 2.alan

"ve"

İkinci dönmede 2.alan

Toplam, x	$P(x)$
2	0.0625
3	0.375
4	0.5625

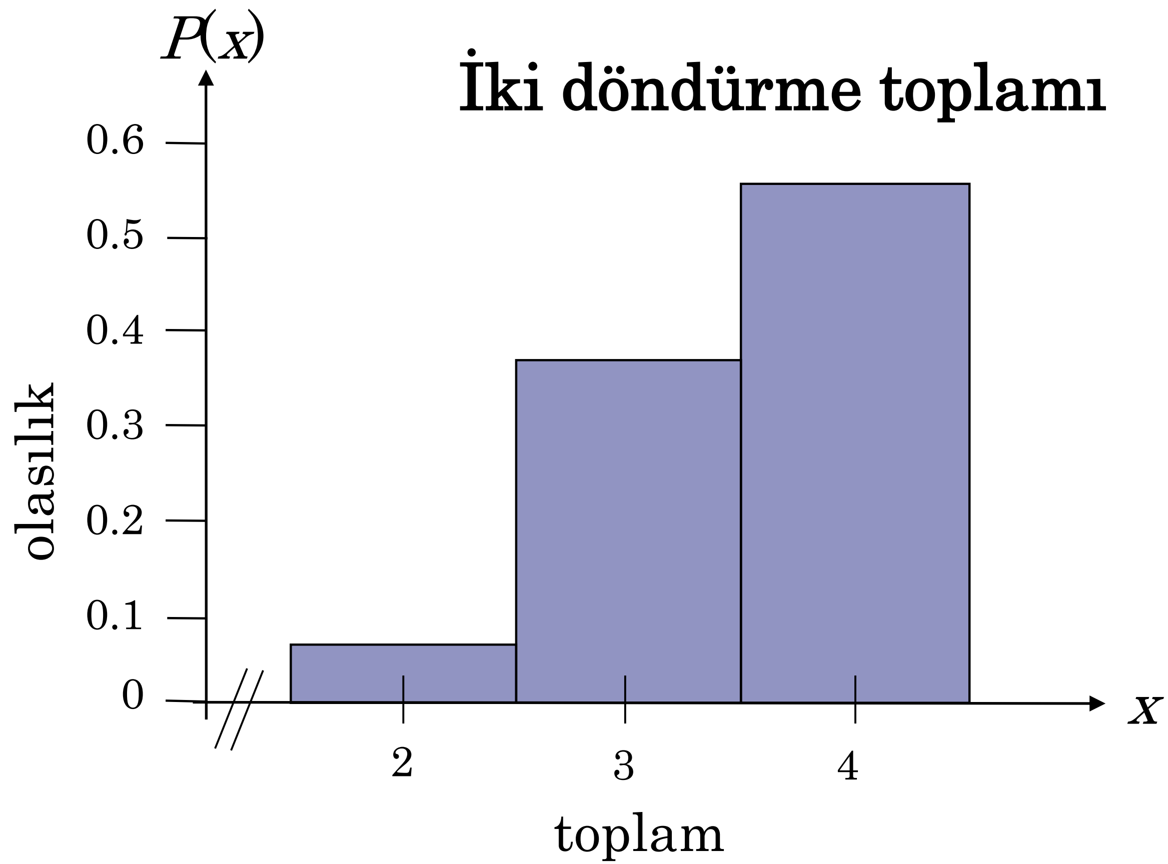
Her olasılık 0 ile 1 arasında ve toplamları 1.

Kesikli Olasılık Dağılımlarının Grafikleri

Örnek:

Histogram grafiğini kullanarak aşağıdaki olasılık dağılımını çizin.

Toplam x	$P(x)$
2	0.0625
3	0.375
4	0.5625



Ortalama

Kesikli r.d için ortalama:

$$\mu = \Sigma x P(x).$$

Her x değeri, karşılık gelen olasılık değeri ile çarpılır ve hepsi toplanır.

Örnek:

İki döndürmenin toplamı için olasılık dağılımının ortalamasını bulun.

x	$P(x)$	$xP(x)$
2	0.0625	2(0.0625) = 0.125
3	0.375	3(0.375) = 1.125
4	0.5625	4(0.5625) = 2.25

$\Sigma x P(x) = 3.5$

İki döndürme için ortalama 3.5.

Varyans

Kesikli r.d için varyans;

$$\sigma^2 = \Sigma(x-\mu)^2 P(x).$$

Örnek:

İki döndürmenin toplamı için olasılık dağılımının varyansını bulun. Ortalama 3.5'tir.

x	$P(x)$	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$	$P(x)(x-\mu)^2$
2	0.0625	–1.5	2.25	≈ 0.141
3	0.375	–0.5	0.25	≈ 0.094
4	0.5625	0.5	0.25	≈ 0.141

$\Sigma P(x)(x-2)^2$

≈ 0.376

İki döndürme sonucu varyans yaklaşık 0.376.

Standart Sapma

Kesikli r.d için standart sapma;

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$

Örnek:

İki döndürmenin toplamı için olasılık dağılımının standart sapmasını bulun. Varyans 0,376'dır.

x	$P(x)$	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$	$P(x)(x-\mu)^2$
2	0.0625	–1.5	2.25	0.141
3	0.375	–0.5	0.25	0.094
4	0.5625	0.5	0.25	0.141

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$= \sqrt{0.376} \approx 0.613$$

Toplamların çoğu, ortalamadan 0,6 puandan fazla değildir.

Beklenen Değer

Kesikli r.d için beklenen değer ortalamayla aynıdır.

$$\text{Beklenen değer} = E(x) = \mu = \Sigma x P(x).$$

Örnek:

Bir çekilişte, her biri 100 $ ve 50 $ 'lık iki ödül için 500 bilet 1 $ a satılır. Kazancın beklenen değeri nedir?

100$ lık ödül için kazanç: 100 – 1 = 99$.

50$ lık ödül için kazanç: 50 – 1 = 49$.

Olası kazançlar (veya sonuçlar) için bir olasılık dağılımı yazınız.

Beklenen Değer

Örneğin devamı:

Kazanç x	$P(x)$
\$99	$\frac{1}{500}$
\$49	$\frac{1}{500}$
–\$1	$\frac{498}{500}$

Ödül yok

$$E(x) = \Sigma x P(x).$$

$$= \$99 \cdot \frac{1}{500} + \$49 \cdot \frac{1}{500} + (-\$1) \cdot \frac{498}{500}$$

$$= -\$0.70$$

Beklenen değer negatif olduğundan, satın alınan her bilet için 0.70 $ kaybetmeyi bekleyebilirsiniz.

§ 4.2

Binom Dağılımı

Binom Denemesi

Bir binom deneyi, aşağıdaki koşulları sağlayan bir olasılık deneyidir.

1. Deneme, her denemenin diğer denemelerden bağımsız olduğu belli sayıda deneme için tekrarlanır.
2. Her deneme için sadece iki olası sonuç çıkarımı vardır. Sonuçlar bir başarı (S) veya bir başarısızlık (F) olarak sınıflandırılabilir.
3. Başarılı olma olasılığı P her deneme için aynıdır.
4. Rasgele değişken x başarılı denemelerin sayısını sayar.

Binom Denemesinin Notasyonları

Gösterim	*Tanım*
n	Bir denemenin tekrarlanma sayısı.
$p = P(S)$	Tek denemede başarı olasılığı.
$q = P(F)$	Tek denemede başarısızlık olasılığı. $(q = 1 - p)$
x	n denemedeki başarı sayısının bir sayısını temsil eder: $x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$.

Binom Denemesi

Örnek:
Deneyin binom denemesi olup olmadığına karar verin. Eğer öyleyse, n, p ve q değerlerini belirtin ve x rasgele değişkeninin olası değerlerini listeleyin. Binom denemesi değilse nedenini açıklayın.

- Kart destesinden rasgele bir kart seçilsin ve kartın As olup olmadığına bakılsın. Daha sonra kart geri konulsun ve bu işlem 8 kez tekrarlansın.

Bu bir binom deneydir. 8 seçimin her biri bağımsız bir denemeyi temsil eder, çünkü kart bir sonraki çekilmeden önce tekrar yerine konuluyor. Sadece iki olası sonuç vardır: kart As veya değil.

$$n = 8 \qquad p = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \qquad q = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13} \qquad x = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$$

Binom Denemesi

Örnek:
Deneyin binom denemesi olup olmadığına karar verin. Öyleyse, n, p ve q değerlerini belirtin ve x rasgele değişkeninin olası değerlerini listeleyin. Binom denemesi değilse nedenini açıklayın.

- 10 kez bir zar atılsın ve gelen sayılar not edilsin.

Bu bir binom denemesi değil. Her deneme bağımsız olsa da, ikiden fazla olası sonuç vardır: 1, 2, 3, 4, 5 ve 6.

Binom Olasılık Fonksiyonu

Binom bir deneyde, n denemede tam olarak x başarı olasılığı

$$P(x) = {}_nC_x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x q^{n-x}.$$

Örnek:

Bir sepette 10 tane pul vardır.Pulların 3'ü kırmızı, 5'i beyaz, 2'si mavidir. Yerine konularak 3 tanesi rasgele seçiliyor.Seçilen pulların bir tanesinin kırmızı olma olasılığı nedir?

$$p = \text{kırmızı pul seçme olasılığı} = \frac{3}{10} = 0.3$$

$$q = 1 - p = 0.7$$

$$n = 3$$

$$x = 1$$

$$P(1) = {}_3C_1 (0.3)^1 (0.7)^2$$

$$= 3(0.3)(0.49)$$

$$= 0.441$$

Binom Olasılık Dağılımı

Örnek:

Bir sepette 10 tane pul vardır.Pulların 3'ü kırmızı, 5'i beyaz, 2'si mavidir. Yerine konularak 4 tanesi rasgele seçiliyor.Seçilen kırmızı pulların sayısı için bir olasılık dağılımı oluşturun.

$$p = \text{kırmızı pul seçme olasılığı} = \frac{3}{10} = 0.3$$

$$q = 1 - p = 0.7$$

$$n = 4$$

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

x	$P(x)$
0	0.240
1	0.412
2	0.265
3	0.076
4	0.008

Her olasılığı bulmak için Binom olasılık fonksiyonu kullanıldı.

Olasılıkları Bulma

Örnek:

Aşağıdaki olasılık dağılımı, 4 pul seçildiğinde 0, 1, 2, 3 veya 4 kırmızı pul seçme olasılığını gösterir..

x	$P(x)$
0	0.24
1	0.412
2	0.265
3	0.076
4	0.008

a.) En fazla 3 kırmızı pul seçme olasılığını bulun.

b.) En az 1 kırmızı pul seçme olasılığını bulun.

a.) $P(\text{en fazla } 3) = P(x \leq 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$

$= 0.24 + 0.412 + 0.265 + 0.076 = 0.993$

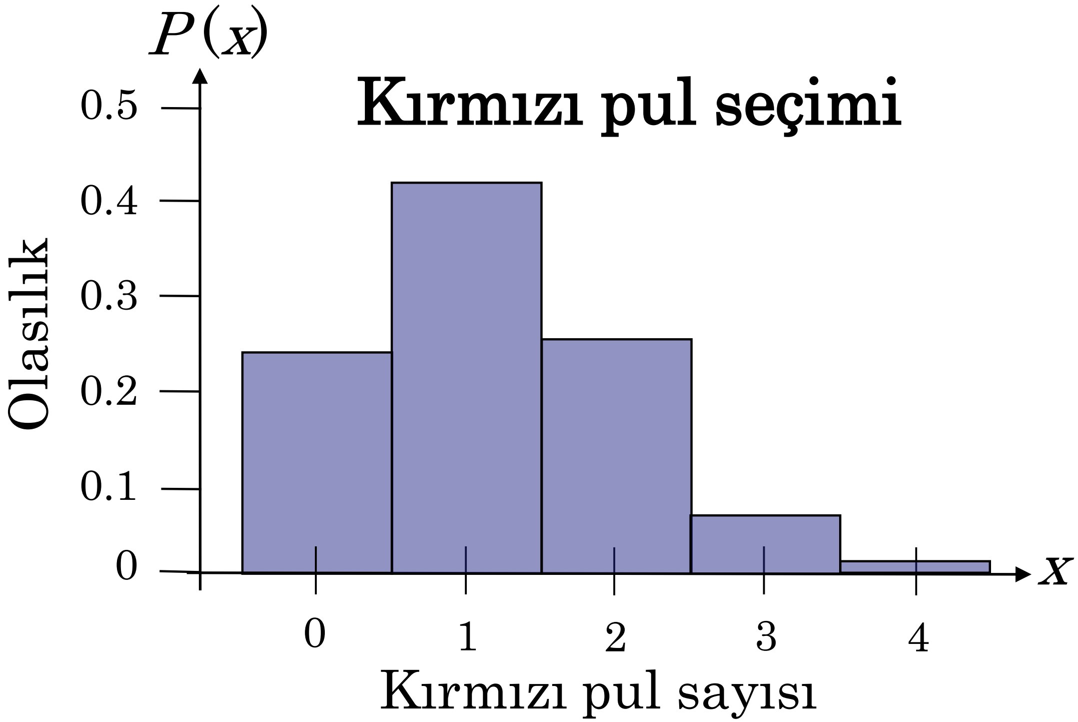
b.) $P(\text{en az } 1) = P(x \geq 1) = \underbrace{1 - P(0)}_{\text{Tümleyeni}} = 1 - 0.24 = 0.76$

Binom Olasılığının Grafiği

Örnek:

Aşağıdaki olasılık dağılımı, 4 pul seçildiğinde 0, 1, 2, 3 veya 4 kırmızı pul seçme olasılığını temsil eder. Histogramı kullanarak dağılımı çizin.

x	$P(x)$
0	0.24
1	0.412
2	0.265
3	0.076
4	0.008



Ortalama,Varyans,Standart Sapma

Binom Dağılımının Kitle Parametleri

Ortalama: $\mu = np$

Varyans: $\sigma^2 = npq$

Standart sapma: $\sigma = \sqrt{npq}$

Örnek:

Bir kolejdeki 5 öğrenciden biri sabah kahvaltılarını atladıklarını söylüyor. 10 öğrenci rasgele seçilirse ortalama, varyans ve standart sapmayı bulun.

$$n = 10 \qquad p = \frac{1}{5} = 0.2 \qquad q = 0.8$$

$$\mu = np = 10(0.2) = 2$$

$$\sigma^2 = npq = (10)(0.2)(0.8) = 1.6$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1.6} \approx 1.3$$

§ 4.3

Daha Fazla Kesikli Olasılık Dağılımları

Geometrik Dağılım

Geometrik dağılım, aşağıdaki koşulları sağlayan X kesikli rasgele değişkenin olasılık dağılımını gösterir.

1. Bir başarı gerçekleşene kadar bir deneme tekrarlanır.
2. Tekrarlanan denemeler birbirinden bağımsızdır.
3. Başarı olasılığı (p) her deneme için sabittir.

İlk başarının x denemesinde ortaya çıkma olasılığı,

$$P(x) = p(q)^{x-1}, \quad q = 1 - p.$$

Geometrik Dağılım

Örnek:

Bir fast food zinciri, her beşinci patates kızartması paketine kazanan bir oyun parçası koyuyor.

a.) Üçüncü patates kızartmasını satın aldığınızda,

b.) Üçüncü veya dördüncü patates kızartması satın aldığınızda. ödül kazanma olasılığını bul,

$p = 0.20 \qquad q = 0.80$

a.) $x = 3$

$$P(3) = (0.2)(0.8)^{3-1}$$
$$= (0.2)(0.8)^2$$
$$= (0.2)(0.64)$$
$$= 0.128$$

b.) $x = 3, 4$

$$P(3 \text{ veya } 4) = P(3) + P(4)$$
$$\approx 0.128 + 0.102$$
$$\approx 0.230$$

Poisson Dağılımı

Poisson dağılımı, aşağıdaki koşulları sağlayan X kesikli rasgele değişkenin olasılık dağılımını gösterir.

1. Deney, bir olayın (x) verilen bir aralıkta meydana gelme sayısını sayarak oluşur. Aralık, zaman, alan veya hacim aralığı olabilir.
2. Olayın meydana gelme olasılığı her aralık için aynıdır.
3. Bir aralıktaki olay sayısı, diğer aralıklardaki olay sayısından bağımsızdır.

Bir aralıktaki tam olarak x oluşum olasılığı;

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$e \approx 2.71818$ ve μ ortalama oluşum sayısı.

Poisson Dağılımı

Örnek:

Brunswick şehrinde ortalama elektrik kesintisi sayısı yılda 4'tür. Belirli bir yılda

a.) Tam olarak 3 kesinti

b.) 3'ten fazla kesinti olma olasılığını bulun.

a.) $\mu = 4, \quad x = 3$

$$P(3) = \frac{4^3(2.71828)^{-4}}{3!}$$

$$\approx 0.195$$

b.) $P(\text{more than } 3)$

$$= 1 - P(x \le 3)$$

$$= 1 - [P(3) + P(2) + P(1) + P(0)]$$

$$= 1 - (0.195 + 0.147 + 0.073 + 0.018)$$

$$\approx 0.567$$