

HİPOTEZ KONTROLLERİ

Bütün bilim dallarında yapılan araştırmaların amacı elde edilen örneklerden yararlanarak üzerinde çalışılan populasyonun bilinmeyen parametreleri hakkında sonuç çıkarmaktır. Sonuç çıkarma iki şekilde yapılabilir: populasyonu temsil edecek parametrelerin tahmini veya populasyon parametreleri ile ilgili hipotezlerin test edilmesi.

Hipotez kontrolleri, bilimsel metotların bir sonucu olarak ortaya çıkar. Bir bilim adamı üzerinde çalıştığı konuyu gözler, verilerini toplar, hipotezini kurar ve oluşturduğu hipotezini topladığı gözlemlerine karşı test eder. Eğer yaptığı kontrol sonucunda gözlemleri ile hipotezi arasında bir uyum yoksa oluşturmuş olduğu hipotezi reddeder. Yapılan kontrol sonucunda gözlemler ile hipotez uyum içinde ise kurmuş olduğu hipotezin geçerli olduğuna veya örnekten elde edilen sonuçların hipotezle belirtilen populasyondan çekilen örneklerden hesaplanabilen sonuçlarla uyum içinde olduğuna karar verir. Verdiği bu kararlarda yanılma olasılıklarını hesaplar.

Araştırmacının yapmış olduğu bir araştırma sonucunda oluşturmuş olduğu hipotezi kabul edip etmeyeceğine karar vermesi için hipotez kontrolü yapması gerekir. Hipotez kontrolü bir istatistik işlemler dizisi olduğu için “**istatistik kontrol**” de denebilir (bazı kitaplarda ise doğrudan “**istatistik kontrol**” denmektedir). Hipotez kontrolü, bir araştırma sonucunda üzerinde çalışılan örnekten hesaplanan istatistiğin, araştırmacının kurduğu hipotezle belirttiği populasyondan alınan aynı örnek genişliğindeki örneklerden elde edilmiş, aynı istatistiklerin örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalini hesaplamak ve hesaplanan ihtimale dayanarak kurulan hipotezin kabul edilip edilmeyeceğine karar vermektir.

Hipotez kontrolleri, kurulan hipotezlerin gerçeklere karşı test edilebildiği bütün alanlarda yapılabilir. Örneğin, bir ilaç fabrikasında, üretilen vitamin-mineral kombinasyonu drajelerde ortalama olarak 20 mg B₁ vitamini olması gerektiğini bilen bir yönetici gerçekten drajelerin ortalama olarak bu miktarda vitamin içerip içermediğini araştırmak isteyebilir. Bunun için n-drajelik bir örnek alır. Bu drajelerin B₁ vitamini miktarını belirler. Daha sonra elde ettiği verilere dayanarak drajelerin ortalama olarak 20 mg B₁ vitamini içerip içermediğine karar verir. Yani ortalama B₁ vitamini miktarının 20 mg'a eşit ($\mu_{\bar{x}} = 20 \text{ mg}$) olduğu hipotezini kontrol ederek karar verir. Ayrıca yönetici yanlış karar verme ihtimalinin ne olduğunu da bilmek ister.

Yapılan bir araştırma sonucunda bir hipotez kurulduğu zaman, bu hipotez yapılan kontrol sonucunda kabul veya reddedilir. Bu karara varılabilmesi bir dizi istatistik işlemi gerektirir. Bu işlemleri 5 grupta toplamak mümkündür.

1. Hipotezlerin kurulması,
2. Yapılacak kontrolün çift veya tek taraflı kontrol olup olmadığına karar verilmesi,
3. Test istatistiğinin seçilmesi,
4. I. tip hata olasılığının belirlenmesi,
5. Gerekirse testin gücünü hesaplanması ve güç eğrilerinin belirlenmesi.

9. HAFTA DERS NOTLARI

Kaynak Kitap: BİYOİSTATİSTİK (2007) Kesici T. ve Kocabaş Z., İkinci Baskı,
Ankara Üniversitesi Eczacılık Fakültesi Yayın No:94

6.1. Hipotezler

Hipotez kontrolünün birinci aşaması, araştırmacının hipotezlerini kurmasıdır. Hipotez kontrolünde iki tip hipotez vardır:

1. Kontrol hipotezi (H_0)
2. Karşıt (alternatif) hipotez (H_1 , birçok yabancı kitapta alternatif hipotez olarak geçer ve H_A ile gösterilir.)

Kontrol hipotezi adından da anlaşılacağı gibi kontrol edilebilir olmalı, bir karşıtı olmalı ve bir anlam taşımalıdır. Yapılan kontrol sonucunda bu hipotez reddedilirse karşıt hipotez kabul edilir.

İstatistik hipotezler üzerinde çalışılan örnekten elde edilen verilerin durumları ile ilgilenir. Bir araştırmacının $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ olmak üzere verileri varsa bu verilerin bir dağılımı söz konusudur. Eğer araştırmacı bu dağılımda bir bölge belirlerse X değerlerinin bu bölgeye dahil olma ihtimalini hesaplayabilir.

Kurulan hipotezler varsayılan dağılımın bir veya daha fazla parametresini kapsayabilir. Bir parametreyi kapsarsa "**basit hipotez**", birden fazla parametreyi kapsarsa "**bileşik hipotez**" denir. Bazı yazarlar basit hipotezleri (h) ile bileşik hipotezleri (H) ile gösterirler. Ancak bu konuda yazarlar arasında tam bir birlik olduğunu söylemek mümkün değildir. Test ve karşıt hipotezin basit ve bileşik olmasına göre hipotez testleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Basit bir hipotezi basit bir karşıt hipoteze karşı test edilir. Test ortalama ile ilgili olarak ise,

$$H_0: \mu = a$$

$$H_1: \mu = b$$

şeklinde olabilir.

2. Basit bir hipotezin bileşik bir hipoteze karşı testi. Bu test aşağıdaki şekilde olabilir.

$$H_0: \mu = a$$

$$H_1: \mu \neq a$$

3. Bileşik bir hipotezin bileşik bir hipotezle test edilmesi. Bu test de aşağıdaki şekilde olabilir:

$$H_0: \mu \geq a$$

$$H_1: \mu < a$$

Hipotez testleri karşıt hipotezin kapsadığı yöne göre iki veya tek taraflı olabilir.

$$H_0: \mu = a \quad \text{veya} \quad H_0: \mu = a$$

$$H_1: \mu < a \quad \text{veya} \quad H_1: \mu > a$$

testleri tek taraflıdır. Buna karşılık aşağıdaki test iki taraflıdır:

$$H_0: \mu = a$$

$$H_1: \mu \neq a$$

Çünkü karşıt hipotez ortalamasının (a) değerinden sapmasının her iki yönünü (büyük veya küçük) kapsamaktadır.

Basit ve bileşik hipotez kavramları aşağıda üç farklı alandan verilen örnekler dikkate alınarak açıklanacaktır.

9. HAFTA DERS NOTLARI

Kaynak Kitap: BİYOİSTATİSTİK (2007) Kesici T. ve Kocabaş Z., İkinci Baskı,
Ankara Üniversitesi Eczacılık Fakültesi Yayın No:94

1. Bir lastik fabrikasından çalışan bir mühendis, üretilen lastiklerin ömrünün en az 35000 km olup olmadığını,

2. Bir ziraatçı, yeni gübrenin buğday verimini diğer bir gübreye nazaran artırıp artırmadığını,

3. Bir doktor yeni bir ilacın herhangi bir hastalığı iyileştirme oranının %90 olup olmadığını, araştırmak istemektedir. Bu araştırmacıların hipotez kontrolü yaparak karar verebilmeleri için önce hipotezlerini kurmaları gerekir.

Birinci örnekte mühendis, “üssel dağılımın bir parametresi olan θ ’nın en az 35000 km olduğu”, ikinci örnekte ziraatçı, “ $\mu_{\bar{x}_1} = \mu_{\bar{x}_2}$ olduğu (ki burada $\mu_{\bar{x}_1}$ ve $\mu_{\bar{x}_2}$ iki normal dağılımın ortalamalarıdır)” ve üçüncü örnekte doktor, “ $\pi=0.90$ olduğu (ki π binom popülasyon parametresidir)” hipotezini kontrol edecektir.

Yukarıdaki örneklerde belirtildiği gibi istatistik hipotezlerin çoğu dağılımın parametreleri ile ilgilidir. Bazen kurulan hipotez dağılımın şeklini de dikkate alabilir. Örneğin birinci örnekte mühendis örneğin bir üssel dağılımdan alınıp alınmadığını da araştırabilir.

Söz konusu araştırmacıların kontrol hipotezleri ile birlikte karşıt hipotezlerini de oluşturması gerekir. Örneğin mühendis karşıt hipotezini “ θ , 35000 km’den azdır” şeklinde oluşturabilir. İkinci örnekte ise “ $\mu_{\bar{x}_1} \neq \mu_{\bar{x}_2}$ ” ziraatçinin kurduğu karşıt hipotez olabilir.

Üçüncü örnekte ise doktor karşıt hipotezini “ $\pi=0.60$ ” şeklinde oluşturmuş olabilir.

Bileşik ve basit hipotez kavramları karşıt hipotezler için de geçerlidir.

Birinci örnek için: $H_0: \theta \geq 35000$ (Bileşik hipotez)

$H_1: \theta < 35000$ (Bileşik hipotez)

İkinci örnek için: $H_0: \mu_{\bar{x}_1} = \mu_{\bar{x}_2}$ (Basit hipotez)

$H_1: \mu_{\bar{x}_1} \neq \mu_{\bar{x}_2}$ (Bileşik hipotez)

Üçüncü örnek için: $H_0: \pi = 0.90$ (Basit hipotez)

$H_1: \pi = 0.60$ (Basit hipotez)

6.2. Test İstatistiği

Hipotezler kurulduktan sonra araştırmacının test istatistiğini belirlemesi gerekir. Çünkü hipotez kontrolü, örnekten hesaplanan istatistiğin, söz konusu popülasyondan aynı genişlikteki örneklerden elde edilecek örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalini hesaplamak ve bu sonuca göre karar vermektir. Test istatistiği örnekten elde edilen verilerin bir fonksiyonudur. Araştırmacının amacı ve elde edilen verilerin doğrultusunda hipotez kontrolünde kullanılacak test istatistiği belirlenir. Kullanılacak test istatistiğinin doğru olarak belirlenmesi yapılan hipotez kontrolünün geçerli olması için önemlidir. Test istatistiğinin belirlenmesi iki örnek ile açıklanacaktır.

ÖRNEK 1:

Bir eczacı yeni üretilen bir ilacın bir hastalığın iyileştirilmesinde diğer bir ilaçtan daha etkili olduğu hipotezini öne sürüyor. Bu hipotezin doğru olup olmadığını kontrol etmek için söz konusu hastalığı taşıyan hastalardan tamamen tesadüfi belirli bir sayıda

9. HAFTA DERS NOTLARI

Kaynak Kitap: BİYOİSTATİSTİK (2007) Kesici T. ve Kocabaş Z., İkinci Baskı,
Ankara Üniversitesi Eczacılık Fakültesi Yayın No:94

hasta seçer. Daha sonra yine tamamen tesadüfi olarak bu hastaları iki gruba ayırır. Gruplardan birini oluşturan hastaları yeni ilaç (A) ile diğer grubu da diğer ilaç (B) ile tedavi eder. Belirli bir süre sonunda hastalığın iyileşme göstergesi olarak kabul edilen bir kan özelliğine ait analizleri yaparak verilerini toplar. Gözlediği verilerine dayanarak eczacı;

H₀: Hastalığın iyileşmesine etki bakımından yeni ilaç ile eski ilaç arasında fark yoktur, gözlenen fark tesadüftendir, yani $\mu_{\bar{x}_A} = \mu_{\bar{x}_B}$ 'dir

kontrol hipotezini,

H₁: Hastalığın iyileşmesine etki bakımından yeni ilaç, eski ilaç ilaçtan daha etkilidir, yani $\mu_{\bar{x}_A} > \mu_{\bar{x}_B}$ 'dir

hipotezine karşı kontrol edecektir.

Burada kontrol hipotezi ile belirlenen “**ortalamlar arası farka ait örnekleme**” dağılımıdır ve örnekten elde edilen $(\bar{A} - \bar{B})$ farkının hipotezle belirtilen popülasyondan çekilen örneklerden elde edilecek “**ortalamlar arası farka ait örnekleme**” dağılımına dahil olma ihtimalini hesaplamak gerekir.

Test hipotezi geçerli olduğunda ortalamlar arası farka ait örnekleme dağılımının ortalaması, $\mu_D = 0$ ve standart sapması (eğer popülasyon varyansı biliniyorsa),

$\sigma_D = \sqrt{\sigma^2 \left(\frac{n_A + n_B}{n_A n_B} \right)}$ olduğuna göre, örnekten hesaplanan farkın bu dağılıma dahil olma

ihtimalini bulmak için Z-değeri aşağıdaki gibi hesaplanır (popülasyon varyansı bilinmediği zaman t-istatistiği hesaplanır ki bu BÖLÜM VIII'de ayrıntılı olarak verilmektedir.):

$$Z = \frac{(\bar{A} - \bar{B}) - \mu_D}{\sqrt{\sigma^2 \frac{(n_A + n_B)}{(n_A n_B)}}}$$

bulunan Z-değeri kullanılarak örnekten hesaplanan farkın örnekleme dağılımına dahil olma ihtimali hesaplanarak hangi hipotezin kabul edileceğine karar verilir.

ÖRNEK 2:

Bir doktor, herhangi bir hastalığın tedavisinde bir ilacın etki oranının belirtildiği gibi gerçekten 0.75 olup olmadığını araştırmak istiyor. Bunun için söz konusu hastalığı taşıyan hastalardan tesadüfen 100 hasta seçiyor ve belirtilen ilaç ile tedavi ediyor. Belirli bir süre sonunda 100 hastadan 69 tanesinin iyileştiğini görüyor.

Bu durumda araştırmayı yapan doktor;

H₀: Söz konusu ilacın hastalığı iyileştirme oranı 0.75 olarak kabul edilebilir. Gözlenen 0.69 oranı ile 0.75 arasındaki fark tesadüftendir, yani, $\pi=0.75$ 'dir

9. HAFTA DERS NOTLARI

Kaynak Kitap: BİYOİSTATİSTİK (2007) Kesici T. ve Kocabaş Z., İkinci Baskı,
Ankara Üniversitesi Eczacılık Fakültesi Yayın No:94

kontrol hipotezini;

H₁: Söz konusu ilacın hastalığı iyileştirme oranı 0.75 değildir, yani $\pi \neq 0.75$ 'dir hipotezine karşı test etmesi gerekir.

Burada hipotez ile belirtilen dağılım, π 'si 0.75 olan populasyondan alınan 100 bireylik örneklerden elde edilecek "oranlara ait örnekleme" dağılımıdır. Örnekten hesaplanan 0.69 oranının bu örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalinin bulunması gerekir. Oranlara ait örnekleme dağılımının ortalaması, $\mu_p = \pi$ ve standart sapması,

$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$ olduğuna göre, örnekten hesaplanan $p=0.69$ oranının söz konusu örnekleme dağılımına dahil olma ihtimalini bulmak için (populasyona ait π bilindiği için) Z-değeri;

$$Z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \text{ şeklinde hesaplanır. Ve bulunan Z-değerine göre, örnekten}$$

hesaplanan oranın örnekleme dağılımına dahil olma ihtimali saptanarak hangi hipotezin kabul edileceğine karar verilir. Bu konu ile ayrıntılı bilgiler ve örnekler sonraki bölümlerde verilmektedir.

6.3. I. ve II. Tip Hatalar

Hipotez kontrollerinde kontrol hipotezi karşıt hipoteze karşı test edilerek karar verildiği zaman iki tip hata söz konusudur.

Yapılan kontrol sonucunda doğru olan kontrol hipotezi (H_0) ret edildiği zaman yapılan hata I. tip hatadır. Başka bir deyişle doğru olan bir kontrol hipotezi için ret kararı verildiği zaman I. tip hata yapılmış olur. I. tip hata yapma ihtimali α ile gösterilir.

II. tip hata ise karşıt hipotezin (H_1) gerçekte doğru olduğu durumlarda kontrol hipotezinin kabulü ile yapılan hatadır. II. tip hata yapma ihtimali β ile gösterilir.

Hipotez kontrollerinde verilecek kararların isabetli veya hatalı olması α ve β ihtimallerine bağlıdır. Kararların isabetli veya hatalı olması ve bunlara ait ihtimaller Tablo 6.1'de verilmektedir.

TABLO 6.1. Hipotez kontrollerinde isabetli ve hatalı kararlar ve ihtimalleri

Gerçek durum	Verilen karar	
	H_0 hipotezi kabul	H_0 hipotezi ret
H_0 doğru	İsabetli karar ($1-\alpha$)	Hatalı karar (α)
H_1 doğru	Hatalı karar (β)	İsabetli karar ($1-\beta$)

Tablo 6.1'de görüldüğü gibi geçerli kontrol hipotezinin kabulü ile ($1-\alpha$) ihtimal ile isabetli karar verilmiş demektir. Geçerli H_1 hipotezinin yapılan kontrol sonucunda kabul edilmesi ile de isabetli karar verilmiş olur ki bunun ihtimali ($1-\beta$)'dir. Bu ihtimale "Testin Gücü (veya Hipotez Kontrolünün Gücü)" denir. Bu konu ile ilgili bilgi 6.5 numaralı bahiste verilmektedir.

Kaynak Kitap: BİYOİSTATİSTİK (2007) Kesici T. ve Kocabaş Z., İkinci Baskı,
Ankara Üniversitesi Eczacılık Fakültesi Yayın No:94

α ve β arasında ters bir ilişki vardır. α -değerinin küçülmesi, I. tip hata ihtimalinin azalmasına karşın II. tip hata ihtimalinin artmasına yol açar.

I. tip hata ihtimali, test istatistiğinin mümkün olan değerlerini yani söz konusu test dağılımını iki bölgeye ayırır:

1. Ret bölgesi veya kritik bölge
2. Kabul bölgesi

Eğer hesaplanan test istatistiğinin değeri “**ret**” bölgesine düşüyorsa kontrol hipotezi ret edilerek karşıt hipotez kabul edilir. Eğer söz konusu istatistiğin değeri “**kabul**” bölgesine dahil ise bu durumda “Kontrol hipotezi reddedilememiştir” denir.

Araştırmacı hipotez kontrolüne başlarken I. tip hata ihtimalini belirlemelidir. Bu ihtimal biyolojik ve fen bilimlerinde genel olarak %1 ve/veya %5 olarak alınır. Bu ihtimalin belirlenmesi konusunda, kontrol hipotezinin reddedilmesinin doğuracağı sonuç göz önünde bulundurulur. İnsan sağlığına ve hayatına zarar verecek maddelerde α küçülür. Örneğin bir araştırmacı hipotezlerini;

H₀: İlaç öldürücü etkiye sahip değildir

H₁: İlaç öldürücü etkiye sahiptir,

şeklinde kurmuş ise $\alpha=0.00001$ gibi çok küçük alınmalıdır. Ayrıca deney büyük örnekler üzerinde ve çok dikkatli yürütülmelidir.

6.4. Çift ve Tek Taraflı Kontroller

Hipotez kontrolleri çift veya tek taraflı olarak yapılabilir. Yapılacak hipotez kontrolünün çift veya tek taraflı yapılıp yapılmayacağını araştırmacının kuracağı karşıt hipotez belirler.

Araştırmacı, örnekten hesapladığı istatistiğinin sadece örnekleme dağılımına dahil olup olmadığı ile ilgileniyorsa, yani sadece örnekleme dağılımının ortalamasından sapıp saptığı önemli ise bu durumda yapılması gereken çift taraflı kontroldür. Bunun için, örnekleme dağılımının ortalamasından büyük veya küçük tarafa örnekten hesaplanan değer veya daha fazla sapanların ihtimali bulunur. Örneğin 6.2. numaralı bölümde 2. örnekte yapılan kontrol çift taraflı kontroldür. Çünkü yapılan hipotez kontrolünde;

H₀: Söz konusu ilacın hastalığı iyileştirme oranı 0.75 olarak kabul edilebilir. Gözlenen 0.69 oranı ile 0.75 arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir, yani, $\pi=0.75$ 'dir

kontrol hipotezi;

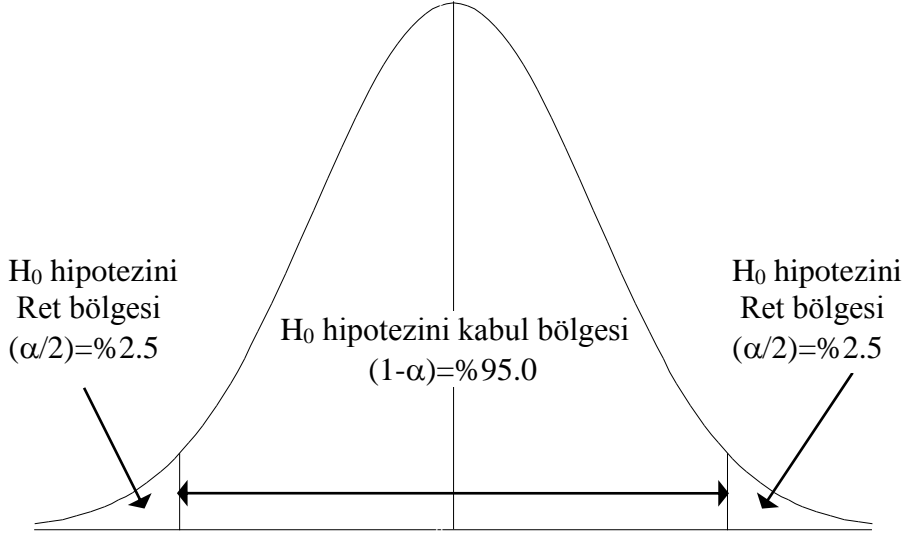
H₁: Söz konusu ilacın hastalığı iyileştirme oranı 0.75 değildir, yani $\pi \neq 0.75$ 'dir

hipotezine karşı test edilmektedir. Burada araştırmacının ilgilendiği söz konusu ilacın etki oranının 0.75 olarak kabul edilip edilemeyeceğidir. Eğer araştırmacı I. tip hata ihtimalini de $\alpha=0.05$ (%5) olarak belirlemiş ise bu ihtimalin yarısını örnekleme dağılımında ortalamadan küçük değerlerin bulunduğu tarafta diğer yarısını ise ortalamadan büyük

9. HAFTA DERS NOTLARI

Kaynak Kitap: BİYOİSTATİSTİK (2007) Kesici T. ve Kocabaş Z., İkinci Baskı,
Ankara Üniversitesi Eczacılık Fakültesi Yayın No:94

değerlerin bulunduğu tarafta alır. Şekil 6.1, çift taraflı hipotez kontrolünde, belirlenen I. tip hata ihtimaline göre ret ve kabul bölgelerini göstermektedir.

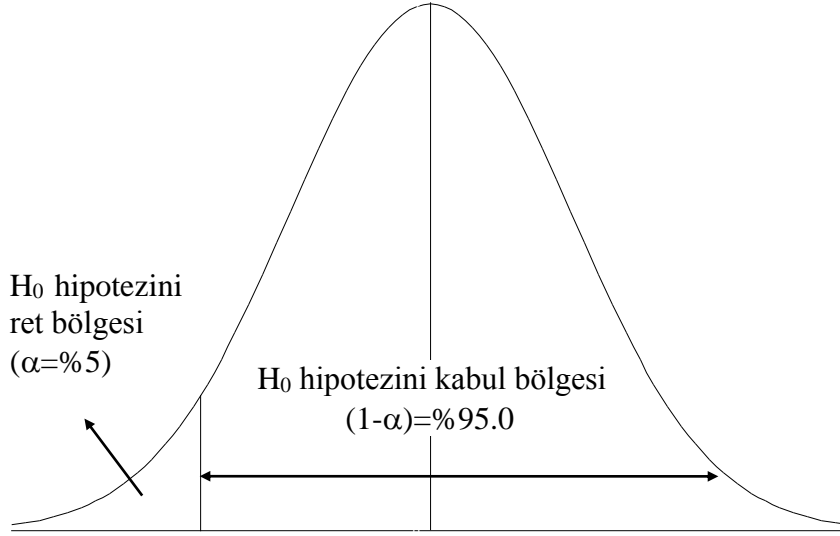


ŞEKİL 6.1. Çift taraflı hipotez kontrolünde, belirlenen I. tip ihtimaline göre ret ve kabul bölgeleri

Bazı durumlarda ise araştırmacı sadece örnekten hesaplanan istatistiğin örnekleme dağılımının ortalamasından küçük (veya büyük) tarafa sapması ile ilgilenebilir. Bu durumda tek taraflı hipotez kontrolü yapılır. Tek taraflı hipotez kontrolünde örnekleme dağılımının ortalamasından küçük (veya büyük) tarafa, örnekten hesaplan istatistik kadar ve daha fazla sapanların ihtimali hesaplanır. Bunun içinde I. tip hata ihtimali dağılımın hangi tarafı ile ilgileniliyorsa o tarafta alınır. Örneğin yukarıdaki örnekte doktor söz konusu ilacın hastalığı iyileştirme oranının 0.75'den daha az olduğunu kontrol etmek istiyorsa;

H₀: Söz konusu ilacın hastalığı iyileştirme oranı 0.75 olarak kabul edilebilir. Gözlenen 0.69 oranı ile 0.75 arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir, yani, $\pi=0.75$ 'dir kontrol hipotezi;

H₁: Söz konusu ilacın hastalığı iyileştirme oranı 0.75'ten düşüktür, yani $\pi<0.75$ 'dir hipotezine karşı test eder ki bu durumda doktor örnekleme dağılımında ortalamadan küçük değerlerin bulunduğu taraf ile ilgilenir. Dolayısıyla ortalamadan sol tarafta 0.69 ve daha küçük oranların bu dağılıma dahil olma ihtimalini hesaplar. Şekil 6.2, tek taraflı hipotez kontrolünde, belirlenen I. tip hata ihtimaline göre ret ve kabul bölgelerini göstermektedir. Şekil 6.2'de görüldüğü gibi araştırmacı ortalamadan küçük değerlerin bulunduğu taraf ile ilgilendiği için %5'lik I. tip hata ihtimalini ortalamanın sol tarafında almıştır. Tek taraflı hipotez kontrolü yapan bir araştırmacı eğer ortalamadan büyük değerlerin bulunduğu taraf ile ilgileniyorsa bu durumda %5'lik I. tip hata ihtimalini ortalamanın sağ tarafında alması gerekir.



ŞEKİL 6.2. Tek taraflı hipotez kontrolünde, belirlenen I.tip ihtimaline göre ret ve kabul bölgeleri

Hipotezler kurulduktan ve test istatistiği hesaplandıktan sonra, eğer hesaplanan test istatistiğine göre örnekten hesaplanan istatistiğin söz konusu dağılıma dahil olma ihtimali kararlaştırılan I. tip hata ihtimalinden daha büyük ise, yani H_0 hipotezini kabul bölgesine giriyorsa H_0 hipotezi reddedilemedi denir. Aksi takdirde kontrol hipotezi ret edilerek karşıt hipotez kabul edilir.

6.5. Testin Gücü

Yapılan hipotez kontrolünün gücü daha önce de belirtildiği gibi $(1-\beta)$ 'dir. β ihtimalinin küçülmesi ile yapılan hipotez kontrolünün gücü artar. Bu ise belirli bir α ve örnek büyüklüğü için kontrol edilecek hipotezin reddedileceği örnek değerinden uzaklığına bağlıdır. Hipotez kontrolünün gücü aşağıda verilen bir örnek ile açıklanacaktır. Verilen örnekte hem II.tip hatanın hem de hipotezin gücünün karşıt hipotez ile belirtilen parametreye bağlı olarak değişimi gösterilecektir.

ÖRNEK:

Bir vitamin karmasında 25 mg B_1 vitamini bulunması gerektiği belirtilmiştir. Üretim aşamasında değişik aralıklarla yapılan kontrollerden beher drajede bulunan B_1 vitamini miktarına ait standart sapmanın 1.2 mg olduğu bilinmektedir. Bu verilere göre

$$\begin{aligned}\mu &= 25 \text{ mg} \\ \sigma &= 1.2 \text{ mg}\end{aligned}$$

dır. Gene daha önceki verilerden drajelerdeki B_1 vitamini miktarının normal dağıldığı bilinmektedir.

9. HAFTA DERS NOTLARI

Kaynak Kitap: BİYOİSTATİSTİK (2007) Kesici T. ve Kocabaş Z., İkinci Baskı,
Ankara Üniversitesi Eczacılık Fakültesi Yayın No:94

Söz konusu fabrikanın ürettiği vitamin karmalarından rastgele 16 ambalaj alınsa ve bunların her birinden de rastgele alınan drajeler tahlil edilse, eğer üretimde herhangi bir değişiklik olmamışsa, bu $n=16$ drajelik örneklerde B_1 vitamini ortalaması, ortalaması, $\mu_{\bar{x}} = 25$ mg ve standart sapması, $\sigma_{\bar{x}} = \frac{1.2}{\sqrt{16}} = 0.3$ mg olan bir normal dağılım gösterir.

Yapılacak bir hipotez testinde test ve karşıt hipotez aşağıdaki gibi olsun:

$$H_0 : \mu_{\bar{x}} = \mu_x = 25 \text{ mg}$$

$$H_1 : \mu_{\bar{x}} < 25 \text{ mg}$$

Burada populasyona ait standart sapma bilindiği için seçilecek test dağılımı standart normal dağılımdır.

Eğer birinci tip hata olasılığı $\alpha=0.05$ olarak belirlenmişse herhangi bir örnek ortalamasına ait test değeri $Z=-1.645$ 'den daha küçük ise test hipotezi reddedilecektir. Ayrıca örnek ortalamasının hangi değerden küçük olduğunda test hipotezinin reddedileceğini (test hipotezinin reddedileceği sınırı) mg cinsinden hesaplamak mümkündür. Bu da;

$$-1.645 = \frac{\bar{X} - 25}{0.3}$$

bağıntısından $\bar{X} = 24.5065$ olarak bulunur. Bu ilaç fabrikasının ürettiği bir vitamin karması partisinden alınan 16 örnekte ortalama < 24.5065 mg olarak bulunmuş ise drajelerdeki B_1 vitamini ortalamasının 25 mg olduğu hipotezi reddedilecektir. Gerçekten ortalama 25 mg B_1 vitamini bulunduğu halde bu partinin yanlış olarak reddedilme olasılığı (I. tip hata olasılığı), $\alpha=0.05$ 'tir. Acaba gerçekte ortalama B_1 vitamini 25 mg'dan daha düşük olduğu halde $\mu=25$ mg hipotezinin (test hipotezinin) kabul edilme olasılığı (II. tip hata olasılığı) nedir?

Bunun hesaplanması için karşıt hipotezin aldığı değerlerin bilinmesi gerekir. Karşıt hipotez ise $H_1 : \mu_{\bar{x}} < 25$ mg şeklinde idi. Bu ise 25 mg'dan küçük bütün değerleri kapsar. bunların her biri için II. tip hata olasılığı hesaplanabilir. Eğer karşıt hipotezin 24.1 mg değeri alınırsa bunun için II. tip hata olasılığı (β) hesaplanabilir. Burada bulunması gereken olasılık ortalaması $\mu=24.1$ mg ve standart sapması 0.3 mg olan normal dağılımda 24.5065 mg'dan daha büyüklerin oranıdır (Şekil 6.3). Bu oran da 24.5065 'in Z -değeri hesaplanarak bulunur.

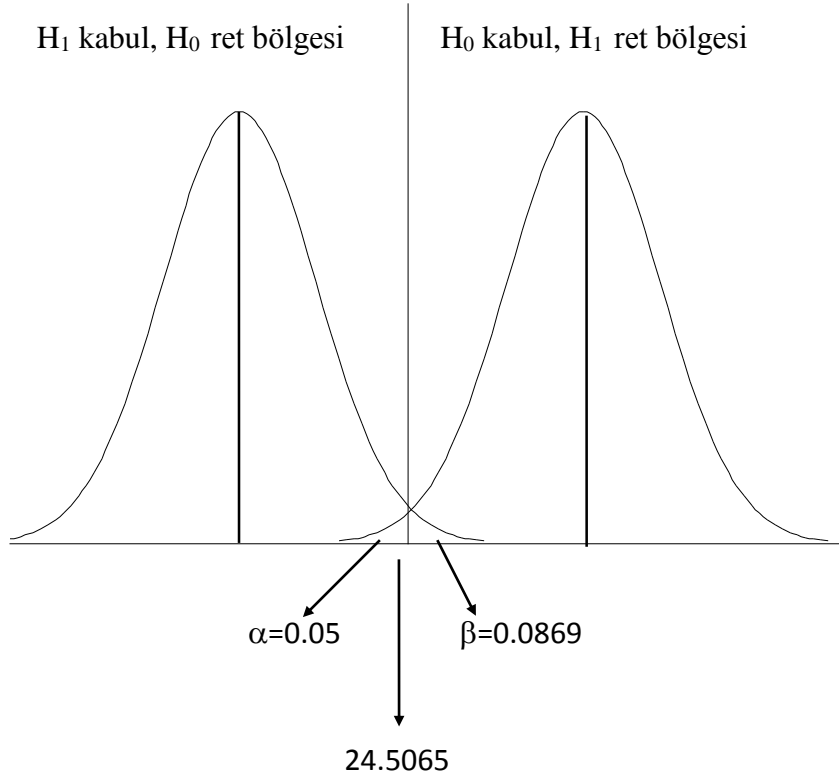
$$Z = \frac{24.5065 - 24.1}{0.3} = 1.355 \cong 1.36$$

Z tablosundan (Tablo A) 0 ile 1.36 arasındaki Z 'lerin oranının 0.4131 olduğu bulunur. Bu değerden büyük Z 'lerin oranı ise $0.5 - 0.4131 = 0.0869$ 'dur. İşte $\alpha=0.05$ olduğunda, karşıt hipotezin ortalaması 24.1 mg ise II. tip hata olasılığı $\beta=0.0869$ 'dur Yani gerçekte vitamin ortalaması 24.1 mg iken 25 mg olarak kabul edilme olasılığı $\%8.69$ 'dur. Bu durumda testin

9. HAFTA DERS NOTLARI

Kaynak Kitap: BİYOİSTATİSTİK (2007) Kesici T. ve Kocabaş Z., İkinci Baskı,
Ankara Üniversitesi Eczacılık Fakültesi Yayın No:94

gücü $1-0.0869=0.9131$ 'dir. Yani $\alpha=0.05$ ve karşıt hipotez $\mu=24.1$ mg ise karşıt hipotezin kabul edilme olasılığı (doğru karar verme olasılığı) %91.31'dir. Şekil 6.3, I. ve II. tip hata ihtimallerini göstermektedir.



ŞEKİL 6.3. $H_0: \mu_{\bar{x}} = 25$ mg kontrol hipotezinin $H_1: \mu_{\bar{x}} = 24.1$ mg hipotezine karşı kontrolünde I. ve II. tip hata ihtimalleri.

Eğer karşıt hipotez ile ortalamanın 24.5 olduğu belirtilmekte ise bunun ret edilme ihtimali, $Z = \frac{24.5065 - 24.5}{0.3} = 0.022$ ve daha çok sapanların oluş ihtimalidir. Bu da $0.5 - 0.008 = 0.4920$ olarak bulunur. Bu durumda $H_0: \mu_{\bar{x}} = 25$ mg kontrol hipotezinin $H_1: \mu_{\bar{x}} = 24.1$ mg hipotezine karşı gücü $1 - 0.4920 = 0.508$ 'dir.

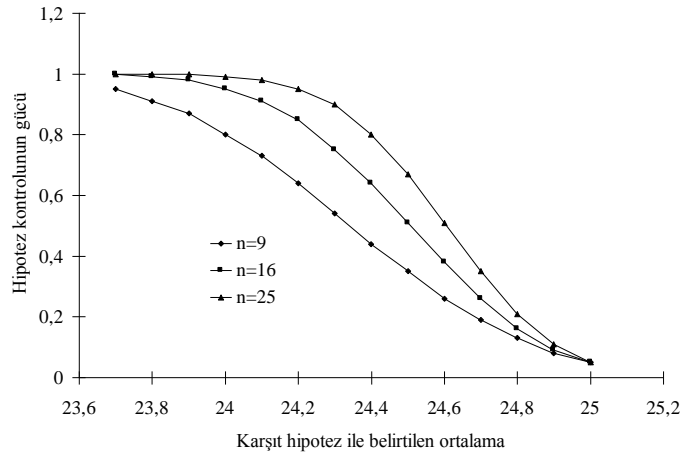
Hipotez kontrollerinin gücü, karşıt hipotezin parametresi kontrol edilen hipotezin parametresine yaklaştıkça azalmaktadır. Ayrıca örnek büyüklüğü arttıkça aynı H_1 hipotezlerine karşı yapılacak kontrolün gücü de artmaktadır. Tablo 6.2 farklı H_1 'ler ve örnek genişlikleri için β ve $(1-\beta)$ ihtimallerini göstermektedir. Şekil 6.4'te ise Tablo 6.2'deki değerler için güç eğrileri verilmiştir.

9. HAFTA DERS NOTLARI

Kaynak Kitap: BİYOİSTATİSTİK (2007) Kesici T. ve Kocabaş Z., İkinci Baskı,
Ankara Üniversitesi Eczacılık Fakültesi Yayın No:94

TABLO 6.2. Ortalaması 25 mg ve standart sapması 1.2 mg olan hipotezle belirtilmiş dağılımdan çekildiği kabul edilen 9, 16 ve 25 bireylik örneklerden hesaplanan çeşitli ortalamalara göre kurulacak karşıt hipotezlerin II. tip hata ihtimalleri ve $H_0: \mu_{\bar{x}} = 25$ mg kontrol hipotezine karşı güçleri.

Karşıt hipoteze göre μ	n=9		n=16		n=25	
	β	(1- β)	β	(1- β)	β	(1- β)
23.7	0.05	0.95	0.00	1.00	0.00	1.00
23.8	0.09	0.91	0.01	0.99	0.00	1.00
23.9	0.13	0.87	0.02	0.98	0.00	1.00
24.0	0.20	0.80	0.05	0.95	0.01	0.99
24.1	0.27	0.73	0.09	0.91	0.02	0.98
24.2	0.36	0.64	0.15	0.85	0.05	0.95
24.3	0.46	0.54	0.25	0.75	0.10	0.90
24.4	0.56	0.44	0.36	0.64	0.20	0.80
24.5	0.65	0.35	0.49	0.51	0.33	0.67
24.6	0.74	0.26	0.62	0.38	0.49	0.51
24.7	0.81	0.19	0.74	0.26	0.65	0.35
24.8	0.87	0.13	0.84	0.16	0.79	0.21
24.9	0.92	0.08	0.91	0.09	0.89	0.11
25.0	0.95	0.05	0.95	0.05	0.95	0.05



ŞEKİL 6.4. $H_0: \mu_{\bar{x}} = 25$ mg kontrol hipotezinin $H_1: \mu_{\bar{x}} < 25$ mg hipotezine karşı kontrolünde n=9, n=16 ve n=25 bireylik örnekler için güç eğrileri. $\alpha=0.05$, $\sigma=1.2$.

Tablo 6.2 ve Şekil 6.4'te görüldüğü gibi karşıt hipotezle belirtilen populasyon parametresi kontrol hipotezi ile belirtilen populasyon parametresine yaklaştıkça II. tip hata artmakta ve dolayısıyla hipotez kontrolünün gücü azalmaktadır. Ayrıca, Tablo 6.2 ve Şekil 6.3'den de izlenebileceği gibi örnek genişliği arttıkça β ihtimali azalmakta ve dolayısıyla bu durum hipotez kontrolünün gücünün, yani (1- β)'nın, artmasını sağlamaktadır.