ECZ158 BİYOİSTATİSTİK DERSİ
11. HAFTA DERS NOTLARI
Kaynak Kitap: BİYOİSTATİSTİK (2007) Kesici T. ve Kocabaş Z., İkinci Baskı, Ankara Üniversitesi Eczacılık Fakültesi Yayın No:94

t DAĞILIMI VE BU DAĞILIM İLE İLGİLİ HİPOTEZ KONTROLLERİ

8.1. t Dağılımı

Ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan bir normal populasyondan tamamen tesadüfen alınan ve n birey içeren örneklerden hesaplanan ortalamaların normal bir dağılım gösterdiği ve bunun ortalamaya ait örnekleme dağılımı olarak adlandırıldığı Bölüm 4.1'de verilmişti. n birey içeren örnekten hesaplanan ortalamaların ($\overline{X}$), standartlaştırılmış değerlerinin Z-dağılımı gösterdiği daha önceki bölümlerde açıklanmıştı. Fakat çoğu zaman populasyonun varyansı bilinmez. Bu sebeple de populasyon varyansı yerine örnekten tahmin edilen varyansın kullanılması gerekir. Varyansı bilinmeyen normal bir populasyondan rastgele çekilen (n) hacimli örnek ortalamalarının populasyon ortalamasından farkları kendi standart hatalarına bölündüğünde bulunan değerler Z dağılımı göstermez. Bu problem Guinness Brewing şirketinde çalışan istatistikçi W. S. Gosset tarafından çözülmüştür. Gosset, varyansı bilinmeyen normal populasyondan alınan örnekler için $\dfrac{\overline{X} - \mu_x}{S_{\overline{x}}}$ değerlerinin dağılımını bulmuş ve bulduğu istatistiğe Z yerine "t" demiştir. Bu istatistik örnek genişliği küçük olduğu ve populasyona ait varyans bilinmediği zaman hipotez kontrollerinde kullanılır. Çalıştığı şirket kendi adı ile yayın yapmasına izin vermediğinden Gosset dağılımını "Student" takma adı ile yayınlamıştır. Onun için bu dağılım Student'in t dağılımı olarak bilinir.

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_X}{S_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu_X}{\dfrac{S_X}{\sqrt{n}}} \qquad \ldots (8.1)$$

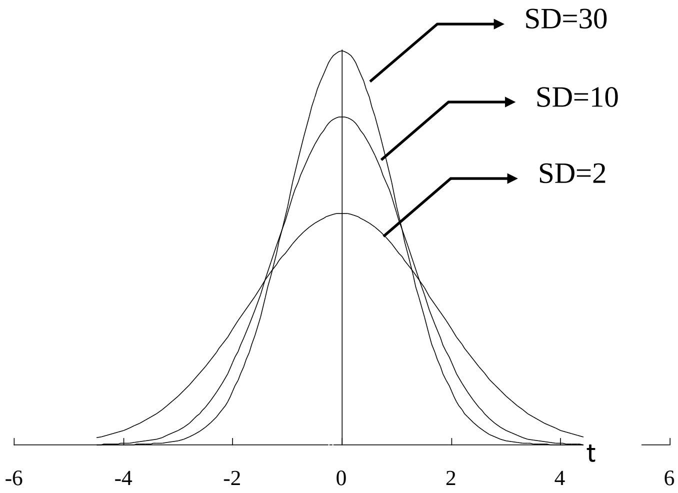
8.1 numaralı eşitlikte $S_{\overline{X}}$, 4.2 numaralı eşitlikte verildiği gibi $\dfrac{S_x}{\sqrt{n}}$ şeklinde hesaplanır ve ortalamaya ait örnekleme dağılımının örnekten hesaplanan standart sapmasıdır, yani kısaca ortalamanın standart hatasıdır. Burada S_x, örnekten hesaplanan (n-1) serbestlik dereceli standart sapmadır. t-dağılımı serbestlik derecesine bağlı bir dağılımdır. v serbestlik dereceli t-dağılımının yoğunluk fonksiyonu;

$$f(t) = \frac{(\frac{v-1}{2})!}{\sqrt{\pi v}\,(\frac{v-2}{2})!}(1+\frac{t^2}{v})^{-(\frac{v+1}{2})} \qquad \ldots (8.2)$$

şeklindedir.

t-dağılımı Z-dağılımı gibi simetrik bir dağılım olup ortalaması sıfırdır. Yani, -t ile 0 arasındaki alan 0 ile t arasındaki alana eşittir. Z-dağılımı hesaplanırken populasyona ait standart sapma kullanıldığı için tek bir Z-dağılımı vardır. Fakat her serbestlik derecesi için bir t-dağılımı vardır. Serbestlik derecesi arttıkça t-dağılımının varyansı azalır (Şekil

8.1) ve 1'e yaklaşır. t-dağılımının varyansı (n-1)/(n-3) olarak belirtilebilir. Serbestlik derecesi sonsuz olduğu zaman t-dağılımı ve Z-dağılımı çakışır.



ŞEKİL 8.1. Farklı serbestlik dereceli t-dağılımları

Tablo C'de farklı serbestlik dereceleri için belirli ihtimalleri sınırlayan t-değerleri verilmiştir. Örneğin, Tablo C'de 5 serbestlik dereceli örneklerden hesaplanan t-değerlerinin %2.5'nin 2.571 değerinden büyük değere sahip olduğu görülür. %2.5'i de -2.571 değerinden küçüktür. Yine aynı tablodan 15 serbestlik dereceli örneklerden hesaplanacak t-değerlerinin %2.5'inin 2.131'den daha büyük olduğu görülür. 20 serbestlik dereceli örnekler için t-değerlerinin %2.5'i 2.086'dan, 30 serbestlik dereceli örnekler için t-değerlerinin %2.5'inin 2.042'den daha büyük t-değerine sahip olduğu Tablo C'den görülmektedir. Serbestlik derecesi sonsuz olduğu zaman ise bu değer 1.96 olmaktadır ki Z-dağılımında %2.5'lik alanı ayıran Z-değeri de 1.96'dır. Serbestlik derecesi sonsuz olduğu zaman %5'lik alanı ayıran t-değeri 1.645 (Tablo C) olup Z-değeri ile aynıdır. Görüldüğü gibi serbestlik derecesi arttıkça söz konusu ihtimale karşılık gelen t-değeri Z'ye yaklaşmaktadır.

8.2. t-Dağılımı ile ilgili Hipotez Kontrolleri

Bölüm VII'de normal populasyonlarda varyans bilindiği zaman test istatistiği olarak Z'nin kullanıldığı açıklanmıştı. Fakat 8.1 numaralı bölümde açıklandığı gibi çoğu zaman populasyon parametreleri, özellikle varyans, bilinmez. Bunun örnekten tahmin edilmesi gerekir. Bu durumda test istatistiği olarak t hesaplanır ve hipotez kontrolü için t-dağılımından yararlanılır.

t-dağılımı ile ilgili hipotez kontrolleri yapılırken izlenecek adımlar Bölüm VII'de açıklandığı gibidir: Araştırıcı hipotezlerini kurar, I. tip hata ihtimalini belirler ve Tablo C'den söz konusu serbestlik dereceli t-dağılımında yanılma ihtimaline karşılık gelen t-değerini bulur, verilerini toplar, test istatistiğini (t-değerini) hesaplar ve hangi hipotezi kabul edeceğine karar verir.

Bu bölümde, çeşitli istatistiklere ait t-dağılımı ile hipotez kontrolü örnekler ile açıklanacaktır.

8.2.1. Ortalamaya ait Hipotez Kontrolü

ÖRNEK 1:

Sağlıklı bireylerde hematokrit düzeyinin (kansızlık göstergesi) ortalaması 39 olan normal bir dağılım gösterdiği bilinmektedir. Tesadüfen seçilen 20 bireyde hematokrit düzeyi ortalaması $\overline{X} = 36.5$ ve standart sapması $S_x = 4.5$ olarak bulunuyor. Örneği oluşturan bireylerin sağlıklı bireyler olduğu söylenebilir mi?

H_0: Örnek ortalaması ile populasyon ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir, söz konusu fark sıfır kabul edilebilir. Yani $\mu_{\overline{x}} = 39$'dur.

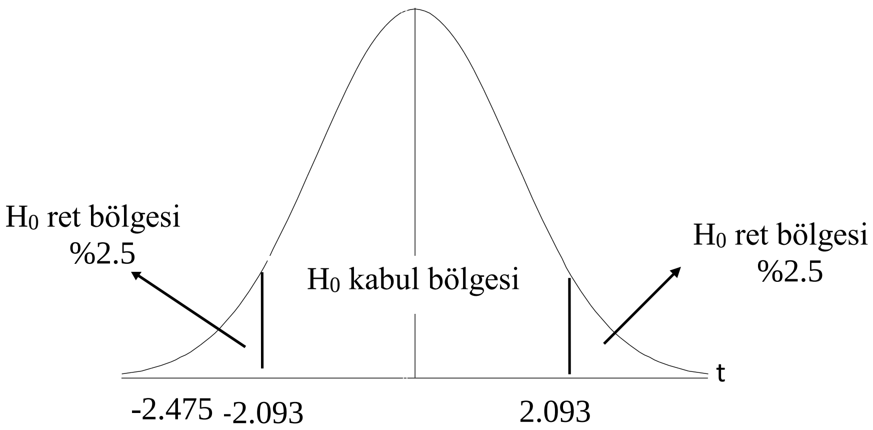
H_1: Populasyon ortalaması ile örnek ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir, söz konusu fark sıfır kabul edilemez. Başka bir deyişle, örnek sağlıklı bireylerin oluşturduğu populasyonu temsil etmez. Yani, $\mu_{\overline{x}} \neq 39$'dur.

Araştırıcı I.tip hata ihtimalini %5 olarak belirlemiş olsun.

Hipotez ile belirtilen örnekleme dağılımı ortalamaya ait örnekleme dağılımıdır. Burada populasyona ait varyans bilinmediği için örnekten hesaplanan standart sapma kullanılarak t-değeri hesaplanacaktır. 4.2 numaralı eşitlik kullanılarak; $S_{\overline{X}} = \dfrac{4.5}{\sqrt{20}} \cong 1.01$ 'dir. ve 8.1 numaralı eşitlikten t-değeri;

$$t = \frac{36.5 - 39}{1.01} = -2.475 \quad \text{olarak bulunur.}$$

Bu örnekte serbestlik derecesi S.D.=(20-1)=19'dur. 19 serbestlik dereceli t-dağılımında değerlerin (Tablo C) %2.5'i, -2.093'ten daha küçüktür. Şekil 8.2'de gösterildiği gibi -2.475 değerinin 19 serbestlik dereceli t-dağılımına dahil olma ihtimali %5'ten daha azdır. Ve H_0 hipotezinin reddedilmesini gerektirir. Veya Şekil 8.2'de görüldüğü gibi hesaplanan t-değeri H_0 hipotezini ret bölgesine düşmektedir ki bu H_0 hipotezinin reddedilmesini gerektirir. Populasyon ortalaması ile örnek ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir, yani örneği oluşturan bireylerin sağlıklı bireyler olduğu söylenemez.



ŞEKİL 8.2. 19 serbestlik dereceli t-dağılımında çift taraflı kontrolde, kontrol hipotezini ret ve kabul bölgeleri

ÖRNEK 2:

Hemoglobin ortalaması 15 olarak bilinen ve normal bir dağılım gösteren populasyondan alındığı ileri sürülen 9 bireylik bir örnekte aşağıdaki veriler elde edilmiştir. Örneğin gerçekten bu populasyonu temsil ettiği söylenebilir mi?

Gözlemler: 14 12 13 14 9 10 15 18 11

H0: Örnek ortalaması ile populasyon ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir, söz konusu fark sıfır kabul edilebilir. Yani $\mu_{\bar{x}} = 15$'dir.

H1: Populasyon ortalaması ile örnek ortalaması arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir, söz konusu örnek hemoglobin ortalaması 15'den daha küçük olan bir populasyonu temsil etmektedir. Yani, $\mu_{\bar{x}} < 15$'dir.

Araştırıcı I.tip hata ihtimalini %5 olarak belirlemiş olsun.

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu_X}{\dfrac{S_X}{\sqrt{n}}}$ eşitliği kullanılarak t-değerinin hesaplanabilmesi için örneğin ortalaması ve standart hatası hesaplanmalıdır.

$$\bar{X} = \frac{14+12+13+14+9+10+15+18+11}{9} = 12.89$$

$$S_X = \sqrt{\frac{1556 - \frac{(116)^2}{9}}{(9-1)}} = 2.759$$

$$S_{\bar{X}} = \frac{2.759}{\sqrt{9}} = 0.9196$$

t-değeri (8.1 numaralı eşitlik kullanılarak);

$t = \dfrac{12.89 - 15}{0.9196} = -2.2945$ olarak bulunur. Örnekte serbestlik derecesi, S.D.=9-1=8'dir.

Tablo C'den 8 serbestlik dereceli t-dağılımında %5'lik kontrol hipotezini ret bölgesinin başladığı t-değerinin -1.86 olduğu görülür. Yukarıda hesaplanan t-değeri -2.2945 olup tablodan bulunan kritik t-değerinden (1.86) küçüktür, yani ret bölgesine düşer. Bu durumda kontrol hipotezi reddedilir. Yani bu örnek hemoglobin ortalaması 15 olan populasyonu temsil etmemektedir.

8.2.2. Ortalamalar arası Farka ait Hipotez Kontrolü

8.2.2.1. Bağımsız İki Grubun Karşılaştırılması

Populasyon varyansı bilindiğinde iki grup ortalamasının aynı populasyondan çekilen örneklere ait olup olmadığı 7. bölümde açıklanmıştı. Ortalamaları karşılaştırılacak iki örnek söz konusu olduğunda ve kontrol hipotezine göre çekildikleri populasyon varyansı bilinmediğinde örneklerden bu varyans tahmin edilir. Bu örneklerin aynı populasyondan çekildikleri varsayıldığına göre her örneğin varyansı populasyon varyansının (σ^2) bir tahminidir. Ortada iki tahmin olduğuna göre bunların serbestlik dereceleri ile alınan tartılı ortalaması populasyon varyansının daha iyi bir tahminini verir. Bu da 4.2 numaralı bölümde açıklanan toplanmış varyanstır. Burada dikkat edilmesi gereken örnek varyanslarının birbirinden farkı (kabul edilen olasılık düzeyinde) aynı populasyondan çekilen örneklerden hesaplanan varyanslarınki kadar olmalıdır. Diğer bir deyişle varyanslar homojen olmalıdır. Varyanslara ait homojenlik kontrolünün nasıl yapılacağı Bölüm XII'de açıklanacaktır. Burada verilen örneklerde varyansların homojenlik varsayımı yerine getirilmiştir.

ÖRNEK 1:

5 tane sağılıklı (A grubu) ve 9 tane kronik böbrek yetmezliği olan (B grubu) bireyde kan değerleri aşağıdaki gibi bulunmuştur.

A grubu	B grubu
38	29
42	29
41	31
40	30
39	30
	27
	33
	32
	31

Kan değerleri bakımından, sağlıklı ve kronik böbrek yetmezliği olan bireyler arasındaki farklılığın önemli olup olmadığını kontrol ediniz.

H0: Kan değerleri bakımından sağlıklı ve hasta bireyler arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir, gözlenen fark sıfır kabul edilebilir. Yani $\mu_{\bar{x}A} - \mu_{\bar{x}B} = 0; \text{yani} \mu_D = 0$'dır.

H1: Kan değerleri bakımından sağlıklı ve hasta bireyler arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir, gözlenen fark sıfır kabul edilemez. Yani, $\mu_{\bar{x}A} - \mu_{\bar{x}B} \neq 0; \text{yani} \mu_D \neq 0$'dır.

Burada hipotez ile belirtilen dağılım, ortalamalar arası farka ait örnekleme dağılımıdır. Örnek ortalamalarından hesaplanan farkın söz konusu dağılıma dahil olma ihtimalini hesaplamak için t-değeri bulunur. Çünkü örneklerin geldiği populasyonların varyansı bilinmemektedir;

$$t = \frac{(\mu_{\overline{X}_A} - \mu_{\overline{X}_B}) - \mu_D}{S_D} \qquad ...(8.3)$$

şeklinde hesaplanır. Eşitlikte S_D, 4.7 numaralı eşitlikten;

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum d_A^2 + \sum d_B^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1)} \frac{(n_A + n_B)}{n_A n_B}}$$ şeklinde hesaplanır.

t-değerinin bulunabilmesi için örneklere ait ortalamaların ve kareler toplamlarının hesaplanması gerekir.

$$\overline{X}_A = \frac{38 + 42 + 41 + 40 + 39}{5} = \frac{200}{5} = 40$$

$$\sum d_A^2 = 8010 - \frac{200^2}{5} = 10.0$$

$$\overline{X}_B = \frac{29 + 29 + 31 + 30 + 27 + 33 + 32 + 31 + 30}{9} = \frac{272}{9} = 30.2$$

$$\sum d_B^2 = 8246 - \frac{272^2}{9} = 25.56$$

$$S_D = \sqrt{\frac{10 + 25.56}{(5-1) + (9-1)} \frac{5+9}{(5)(9)}} = 0.960$$

Bu değerler hesaplandıktan sonra 8.3 numaralı eşitlik kullanılarak t-değeri;

$$t = \frac{40 - 30.2}{0.960} = 10.208$$ olarak bulunur.

Burada Tablo C'den kritik değere bakılırken serbestlik derecesi örneklere ait serbestlik derecelerinin toplamıdır, yani S.D.=(5-1)+(9-1)=12'dir. Eğer araştırıcı I. tip hata ihtimalini %5 olarak belirlemiş ise Tablo C'de 12 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'lik alanın (çünkü hipotez kontrolü çift taraflıdır) başladığı t-değeri ±2.179'dur. Bu değere göre hesaplanan t-değerinin 12 serbestlik dereceli t-dağılımına dahil olma ihtimali %5'ten çok küçüktür, hatta 0.01'den de küçüktür. (P<0.01). Bu durumda kontrol hipotezi reddedilir. Yani sağlıklı ve kronik böbrek yetmezliği olan bireyler arasında kan değerleri bakımından fark istatistik olarak önemlidir.

ÖRNEK 2:

A firmasından farklı partilerden alınan 10 vitamin drajesinde E vitamini ortalaması ve standart hatası 12.1±0.1 ve B firmasından farklı partilerden alınan 12 drajede E vitamini ortalaması ve standart hatası 13.5±0.2 olarak bulunmuştur. İki firma arasında drajelerdeki E vitamini bakımından farklılığının önemli fark olup olmadığına karar veriniz.

H0: Drajelerdeki E vitamini miktarı bakımından iki firma arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir, gözlenen fark sıfır kabul edilebilir. Yani $\mu_{\bar{x}A} - \mu_{\bar{x}B} = 0$; yani $\mu_D = 0$'dır.

H1: Drajelerdeki E vitamini miktarı bakımından iki firma arasındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir, gözlenen fark sıfır kabul edilemez. Yani, $\mu_{\bar{x}A} - \mu_{\bar{x}B} \neq 0$; yani $\mu_D \neq 0$'dır.

Burada hipotez ile belirtilen dağılım, ortalamalar arası farka ait örnekleme dağılımıdır ve örnek ortalamalarından hesaplanan farkın söz konusu dağılıma dahil olma ihtimalini hesaplamak için t-değeri yani 8.3 numaralı eşitlik kullanılır. Çünkü örneklerin geldiği populasyonların varyansı bilinmemektedir;

$t = \dfrac{\mu_{\bar{X}_A} - \mu_{\bar{X}_B}}{S_D}$'dir. Ve daha önce belirtildiği gibi S_D, aşağıda verildiği şekilde hesaplanır.

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum d_A^2 + \sum d_B^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1)} \frac{(n_A + n_B)}{n_A n_B}}$$

Ortalamalar arası farka ait standart sapmanın hesaplanabilmesi için önce her bir örnek için kareler toplamının bulunması gerekir.

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} \Rightarrow (S_{\bar{x}})^2 = \left(\frac{S_x}{\sqrt{n}}\right)^2 = S_x^2 = S_{\bar{x}}^2.n$$

$$S_x^2 = \frac{\sum d_x^2}{(n-1)} \qquad \text{olduğuna göre;}$$

$$\frac{\sum d_x^2}{(n-1)} = S_{\bar{x}}^2.n \Rightarrow \sum d_x^2 = S_{\bar{x}}^2.n.(n-1)\text{'dir.}$$

Benzer şekilde;

$$\sum d_A^2 = S_{\bar{A}}^2.n_A.(n_A - 1)$$
$$\sum d_B^2 = S_{\bar{B}}^2.n_B.(n_B - 1)$$

olarak bulunur. Yukarıda verilen eşitlikler kullanılarak Örnekler için kareler toplamları ve t-değeri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\sum d_A^2 = (0.1)^2.10.(10-1) = 0.9$$

$$\sum d_B^2 = (0.2)^2.12.(12-1) = 5.28$$

$$S_D = \sqrt{\frac{0.9+5.28}{(10-1)+(12-1)} \frac{10+12}{(10)(12)}} = 0.238$$

ve $t-$değeri

$$t = \frac{12.1-13.5}{0.238} = -5.882 \text{ olarak bulunur.}$$

Burada Tablo C'den kritik değere bakılırken serbestlik derecesi örneklere ait serbestlik derecelerinin toplamıdır, yani S.D.=(10-1)+(12-1)=20'dir. Eğer araştırıcı I. tip hata ihtimalini %5 olarak belirlemiş ise Tablo C'de 20 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'lik alanın (çünkü kontrol çift taraflıdır) başladığı t-değeri 2.086'dır. Bu değere göre hesaplanan t-değerinin (-5.882), 20 serbestlik dereceli t-dağılımına dahil olma ihtimali %5'ten çok küçüktür. Bu durumda kontrol hipotezi reddedilir. Yani, iki firma arasında drajelerdeki E vitamini bakımından farklılık önemlidir.

8.2.2.2. Bağımlı İki Grubun Karşılaştırılması

Birçok araştırmada iki grup birbirine bağımlı olabilir. Bazı durumlarda birinci ve ikinci gruptaki bireyler aynı bireylerdir. Örneğin belirli sayıdaki hastadan üzerinde durulan özellik için tedavi öncesi ve tedavi sonrası ölçümler yapıldığında bu durum vardır. Aynı petri kabı içinde gelişme hızı araştırılan iki mikroorganizma türünden elde edilen sonuçlar da bağımlıdır. Bu şekilde düzenlenmiş denemelerde iki grubun karşılaştırılması için kullanılan t-testine, Eş-yapma-t-testi denir. Burada kurulan kontrol hipotezi, eşler arasındaki farkların, yani $D_i=x_{1i}-x_{2i}$ değerlerinin, ortalamasının ($\overline{D}$), ortalaması sıfır olan populasyondan çekilen örnekten hesaplandığı şeklindedir. Eşler arası farkın ortalamasının söz konusu dağılıma dahil olma ihtimalini hesaplamak için test istatistiği t'dir (populasyon varyansı bilinmediği için);

$$t = \frac{\overline{D} - \mu_{\overline{D}}}{S_{\overline{D}}} \qquad ...(8.4)$$

8.4 numaralı eşitlikte $S_{\overline{D}}$ aşağıda verildiği şekilde hesaplanır ve eşler arası farka ait dağılımın örnekten hesaplanan standart sapmasıdır veya kısaca standart hatasıdır;

$$S_{\overline{D}} = \frac{S_D}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{\sum d_D^2}{(n-1)}}}{\sqrt{n}}$$

Eşitlikte $\sum d_D^2$, eşler arası farka ait kareler toplamı olup, $\sum d_D^2 = \sum D_i^2 - \frac{(\sum D_i)^2}{n}$ şeklinde hesaplanır. Hipotez kontrolü yapılırken t-dağılımı için serbestlik derecesi ise, S.D.=(n-1)’dir.

ÖRNEK 1:

Yüksek tansiyonu olan 10 hastanın tedaviden önceki ve sonraki kan basınçları (mm) aşağıdaki gibi bulunmuştur. Yüksek tansiyonlu hastalara uygulanan tedavinin tansiyonu düşürüp düşürmediğini kontrol ediniz.

Hasta	Tedavi öncesi (x_{1i})	Tedavi sonrası (x_{2i})	$D_i=X_{1i}-X_{2i}$	D_i^2
1	155	142	13	169
2	166	160	6	36
3	184	179	5	25
4	155	150	5	25
5	178	142	36	1296
6	181	170	11	121
7	165	150	15	225
8	179	145	34	1156
9	189	170	19	361
10	148	148	0	0
		Toplam	144	3414

H0: Hastalara uygulanan tedavi etkili olmamıştır. Tedavi öncesi ve sonrası ölçülen tansiyonlar arasındaki farklar ortalaması tesadüften ileri gelmektedir, sıfır kabul edilebilir. Yani $\mu_{\overline{D}} = 0$’dır.

H1: Hastalara uygulanan tedavi etkili olmuştur. Tedavi öncesi ve sonrası ölçülen tansiyonlar arasındaki pozitif fark tesadüften ileri gelmemektedir, ortalaması sıfırdan büyüktür. Yani $\mu_{\overline{D}} > 0$’dır.

Test istatistiğinin hesaplanması aşağıdaki gibidir:

$$\overline{D} = \frac{13+6+5+5+36+11+15+34+19+0}{10} = \frac{144}{10} = 14.4$$

$$\sum d_D^2 = 3414 - \frac{(144)^2}{10} = 1340.4$$

$$S_D^2 = \frac{1340.4}{10-1} = 148.93$$

$$S_D = \sqrt{(148.93)} = 12.203$$

$$S_{\bar{D}} = \frac{12.203}{\sqrt{10}} = 3.859$$

ve t – istatitği;

$$t = \frac{14.4}{3.859} = 3.732 \text{ olarak bulunur.}$$

Burada Tablo C'den kritik değere bakılırken serbestlik derecesi, S.D.=(10-1)=9'dur. Eğer araştırıcı I. tip hata ihtimalini %5 olarak belirlemiş ise Tablo C'de 9 serbestlik dereceli t-dağılımında %5'lik alanın (çünkü kontrol tek taraflıdır) başladığı t-değeri 1.834'tür. Bu değere göre hesaplanan t-değeri (3.732) ve daha fazla sapanların, 9 serbestlik dereceli t-dağılımına dahil olma ihtimali %5'ten çok küçüktür. Bu durumda kontrol hipotezi reddedilir. Yani, tedavi hastaların yüksek tansiyonunu düşürmüştür kararı verilir.

8.2.3. Korelasyon Katsayısına ait Hipotez Kontrolü

ÖRNEK 1:

18 bireylik bir örnekte X ve Y özellikleri arasındaki korelasyon katsayısı, r_{xy}=-0.453 olarak bulunmuştur. Üzerinde durulan iki özellik arasında doğrusal bir ilişki olduğu söylenebilir mi?

H_0: İki özellik arasında hesaplanan korelasyon katsayısı tesadüften ileri gelmektedir, iki özellik arasında doğrusal bir ilişki yoktur. Örnek, korelasyon katsayısı 0 olan bir populasyonu temsil etmektedir. Yani, ρ_{xy}=0'dır.

H_1: İki özellik arasında hesaplanan korelasyon katsayısı tesadüften ileri gelmemektedir, iki özellik arasında doğrusal bir ilişki vardır. Örnek, korelasyon katsayısı 0'dan farklı olan bir populasyonu temsil etmektedir. Yani, $\rho_{xy}\neq$0'dır.

Kontrol hipotezi geçerli olduğu zaman yani ρ=0 olduğunda örneklerden hesaplanan korelasyon katsayılarının yaklaşık normal dağılım gösterdiği daha önce açıklanmıştı. Bulduğumuz korelasyon katsayısının ρ=0 olan bir populasyondan geldiğini kontrol etmek için hesaplanan t-istatistiği;

$$t = \frac{r - \rho}{S_r} \qquad \text{...(8.5)}$$

dir. Eşitlikte S_r, korelasyon katsayına ait örnekleme dağılımının örnekten tahmin edilen standart sapması (korelasyon katsayısının standart hatası) olup aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$S_r = \sqrt{\frac{(1 - r^2)}{(n - 2)}}$$

t-istatistiğinin hesaplanması;

$$S_r = \sqrt{\frac{(1-(-0.453)^2}{(18-2)}} = 0.229 \text{ ve } 8.5 \text{ numaralı eşitlik kullanılarak;}$$

$$t = \frac{-0.4530}{0.229} = -2.0323 \text{ olarak bulunur.}$$

Burada Tablo C'den kritik değere bakılırken serbestlik derecesi, S.D.=(18-2)=16'dır. Eğer araştırıcı I. tip hata ihtimalini %5 olarak belirlemiş ise Tablo C'de 16 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'lik alanın başladığı t-değeri mutlak olarak 2.120'dir. Bu değere göre hesaplanan t-değeri (-2.0323) ve daha fazla sapanların, 16 serbestlik dereceli t-dağılımına dahil olma ihtimali %5'ten büyüktür. Bu durumda kontrol hipotezi reddedilemez. Yani, üzerinde durulan iki özellik arasında doğrusal bir ilişki yoktur.

8.2.4. Regresyon Katsayısına Ait Hipotez Kontrolü

ÖRNEK:

Yapılan bir araştırmada 10 bireyin yaş ve kolesterol (mg/10ml) aşağıdaki gibi bulunmuştur.

X (Yaş)	Y(Kolesterol düzeyi)	X^2	Y^2	XY
47	17	2209	289	799
51	22	2601	484	1122
38	17	1444	289	646
64	24	4096	576	1536
54	25	2916	625	1350
32	19	1024	361	608
48	11	2304	121	528
75	33	5625	1089	2475
70	21	4900	441	1470
40	10	1600	100	400
519.0	199.0	28719.0	4375.0	10934.0

Kolesterolün yaşa göre regresyon katsayısını hesaplayarak, bulunan regresyon katsayısının tesadüften ileri gelip gelmediğini kontrol ediniz.

$$\sum d_x^2 = 28719 - \frac{(519)^2}{10} = 1782.9$$

$$\sum d_y^2 = 4375 - \frac{(199)^2}{10} = 414.9$$

$$\sum d_x d_y = 10934 - \frac{(519)(199)}{10} = 605.9$$

$$b_{yx} = \frac{605.9}{1782.9} = 0.3398$$

H₀: Yaş ile kolesterol düzeyleri arasında bulunan regresyon katsayısı tesadüften ileri gelmektedir. Örnek, regresyon katsayısı 0 olan bir populasyonu temsil etmektedir. Yani, β_{yx}=0'dır.

H₁: Yaş ile kolesterol düzeyleri arasında bulunan regresyon katsayısı tesadüften ileri gelmemektedir. Örnek, regresyon katsayısı 0'dan farklı olan bir populasyonu temsil etmektedir. Yani, $\beta_{yx} \neq 0$'dır.

Kontrol hipotezi ile belirtilen dağılım, regresyon katsayısına ait örnekleme dağılımıdır ve bu dağılıma örnekten hesaplanan regresyon katsayısının dahil olma ihtimalini bulmak için t-değeri (populasyona ait regresyon katsayısı bilinmediği için) aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$t = \frac{b_{yx} - \beta_{yx}}{S_b} \qquad \ldots(8.6)$$

5.6 numaralı bölümde açıklandığı üzere;

$$\sum d_e^2 = 414.9 - \frac{(605.9)^2}{1782.9} = 208.99$$

$$S_e^2 = \frac{208.99}{(10-2)} = 26.124$$

$S_b = \sqrt{\frac{26.124}{1782.9}} = 0.121$ olarak bulunur. Ve 8.6 numaralı eşitlik kullanılarak;

$t = \frac{0.3398}{0.121} = 2.808$ olarak bulunur.

Burada Tablo C'den kritik değere bakılırken serbestlik derecesi, S.D.=(10-2)=8'dir. Eğer araştırıcı I. tip hata ihtimalini %5 olarak belirlemiş ise Tablo C'de 8 serbestlik dereceli t-dağılımında %2.5'lik alanın başladığı t-değeri mutlak olarak 2.306'dır. Bu değere göre hesaplanan t-değerinin (2.808), 8 serbestlik dereceli t-dağılımına dahil olma ihtimali %5'ten küçüktür. Bu durumda kontrol hipotezi reddedilir.

Yani, üzerinde durulan iki özellik arasında hesaplanan regresyon katsayısı tesadüften ileri gelmemiştir ve sıfır kabul edilemez.

8.3. Bilgisayar Uygulaması

ÖRNEK 1:

8.2.1. numaralı bölümde Örnek 1'de bir araştırıcının hemoglobin ortalaması 15 olan normal dağılım gösteren bir populasyondan alındığı ileri sürülen 9 bireylik örnekte aşağıdaki verileri topladığı verilmişti.

14 12 13 14 9 10 15 18 11

Araştırıcı gerçekten 9 bireylik bu örneğin ortalaması 15 olan populasyonu temsil edip etmediğini kontrol etmek için verilerini MINITAB paket programında C1 sütununa işlemiş ise aşağıdaki şekilde komutunu verir. 'TTEST 15 C1' komutu C1 sütunundaki verilerin 15'ten olan farklılığının tesadüfi olup olmadığını kontrol eder. Daha sonra ";" koyarak verdiği "Alternative -1" alt komutu ile C1 sütununa kaydettiği 15 verinin "ortalamasının 15 kabul edilebileceğine" dair kontrol hipotezini "örnek ortalamasının 15'ten küçük olduğu" karşıt hipotezine karşı test edileceğini belirtir.

Bu komutlar verildikten sonra MINITAB çıktıları aşağıda verildiği gibidir.

```
MTB > TTEST 15 C1;
SUBC> ALTERNATIVE -1.
```

One-Sample T: C1

```
Test of mu = 15 vs < 15

                                              95%
                                            Upper
Variable  N     Mean    StDev  SE Mean      Bound      T      P
C1        9  12,8889  2,7588   0,9196    14,5989  -2,30  0,025
```

Bu verilen sonuçlar söz konusu bölümde örnek çözülürken bulunmuş olan sonuçlardır. MINITAB çıktılarından görüldüğü gibi hesaplanan t-değerinin olasılığı 0.025'tir. Araştırıcı I.tip hata olasılığını %5 olarak kararlaştırmış ise verilen bu olasılığa göre kontrol hipotezini reddedecektir.

ÖRNEK 2:

5 tane sağlıklı (A) ve 9 tane kronik böbrek yetmezliği olan hastada (B) kan değerleri aşağıdaki gibi MINITAB paket programına işlenmiş olsun.

```
MTB > PRINT C2 C3
```

Data Display

```
Row   A   B
  1  38  29
  2  42  29
  3  41  31
  4  40  30
  5  39  27
  6      33
  7      32
  8      31
```

A ve B grupları arasında kan değeri bakımından fark olup olmadığını araştırmak isteyen araştırıcı MINITAB paket programında "TWOSAMPLE C2 C3" komutunu kullanmalıdır. Bu komuttan sonra ";" konarak verilen "POOLED" alt komutu C2 ve C3 sütunlarında verileri işlenmiş olan grupların varyanslarının homojen olduğunu belirtir.

Bu komutlar verildiği zaman aşağıdaki çıktılarda görüldüğü gibi önce gruplara ait tanıtıcı istatistikler hesaplanır. Daha sonra %95 ihtimal ile iki grup ortalaması arası farkın güven sınırları görülmektedir (Bu konu hakkında detaylı bilgi için BÖLÜM IX'a bakınız.).

Ortalamalar arası farka ait güven sınırları verildikten sonra "A ve B gruplarının temsil ettiği populasyon ortalamalarının eşit olduğu" kontrol hipotezinin "populasyon ortalamalarının eşit olmadığı" karşıt hipotezine karşı test edildiği belirtilir.

```
MTB > TWOSAMPLE C23 C24;
SUBC> POOLED.
```

Two-Sample T-Test and CI: A; B

```
Two-sample T for A vs B

   N   Mean  StDev  SE Mean
A  5  40,00   1,58     0,71
B  9  30,22   1,79     0,60


Difference = mu (A) - mu (B)
Estimate for difference:  9,77778
95% CI for difference:  (7,68588; 11,86968)
T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = 10,18 P-Value = 0,000 DF = 12
Both use Pooled StDev = 1,7213
```

Kontrol edilen hipotezler de belirtildikten sonra hesaplanan t-değeri, serbestlik derecesi ve bu t-değerinin oluş ihtimali çıktılarda sunulmaktadır. Hesaplanan t-değerinin 12 serbestlik dereceli t-dağılımına dahil olma ihtimali 0'a çok yakın olduğu için araştırıcı kontrol hipotezini reddeder. Yani A ve B gruplarının ortalamaları arasındaki farklılığın tesadüfi olmadığı sonucuna varır.

ÖRNEK 3:

8.2.2.2 numaralı bölümde bağımlı iki grubun karşılaştırılması için 10 hastanın tedavi öncesi ve tedavi sonrası kan basınçları için verilen örneği araştırıcı MINITAB paket programını kullanarak çözmek isterse C5 ve C6 sütunlarına verilerini girer. Bu sütunlara "ONCE" ve "SONRA" isimlerini vermiş olabilir.

```
MTB > PRINT C5 C6
```

Data Display

```
Row   ONCE   SONRA
  1    155    142
  2    166    160
  3    184    179
  4    155    150
  5    178    142
  6    181    170
  7    165    150
  8    179    145
  9    189    170
 10    148    148
```

```
MTB > Paired 'SONRA' 'ONCE'.
```

Paired T-Test and CI: SONRA; ONCE

```
Paired T for SONRA - ONCE

             N      Mean     StDev  SE Mean
SONRA       10   155,600    13,268    4,196
ONCE        10   170,000    14,134    4,470
Difference  10  -14,4000   12,2038   3,8592


95% CI for mean difference: (-23,1301; -5,6699)
T-Test of mean difference = 0 (vs not = 0): T-Value = -3,73  P-Value = 0,005
```

Yukarıdaki sonuçlar 8.2.2.2 numaralı bölümde örnek çözülürken de bulunmuştu. MINITAB çıktısı araştırıcıya (-3.73) olarak hesaplanan t-değerinin olasılığını da (0.0047) vermektedir. Bunun için araştırıcı bu olasılık %5'ten küçük olduğu için kontrol hipotezini reddederek karşıt hipotezi, yani tedavinin etkili olduğu hipotezini kabul eder.

Bir önceki bölümde açıklandığı gibi araştırıcı analizlerini menüleri ve diyalog kutularını kullanarak da yapabilir.