BÖLÜM-IV: UZAYZAMAN ve DÖRT-VEKTÖRLER

1. Giriş
2. Dört-vektörler
3. Dört-hız ve Dört-ivme

1. Giriş

- ***İnvaryant:*** Dönüşümler altında değeri değişmeyen nicelik
- ***Kovaryant:*** Dönüşümler altında formu değişmeyen nicelikler (denklemler).
- ***Minkowski uzayı***: 4-boyutlu uzayzaman (3 uzay + 1 zaman boyutu)
- ***Karesi alınmış aralık:*** Uzayzamanda iki olay göz önüne alalım, *(x, y, z, t)* ve *(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt).* Uzaydaki iki nokta arasındaki uzaklık kavramını, uzay-zamandaki iki nokta arasındaki ***aralık*** kavramına genelleştirebiliriz; bunu *ds* ile adlandıralım. *ds*' nin tüm (eylemsiz) gözlemciler için aynı olması için Lorentz dönüşümleri ve dönmeler altında değişmez kalması gerekir ve şu şekilde verilir,

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

- Bu tanımla birlikte, bir zamantürü (zamansal) aralıkla ayrılan olaylar $ds^2 \rangle 0$; bir uzaytürü (uzaysal) aralıkla ayrılanlar $ds^2 \langle 0$; ve bir sıfır ya da ışıktürü (ışıksal) aralıkla ayrılanlar $ds^2=0$ şeklindedir.

2. Dört-vektörler (4-vektörler ya da dörtlü vektörler)

Dört-vektör notasyonu kullanışlı bir matematiksel araçtır çünkü herhangi iki 4-vektörün skaler çarpımı Lorentz invaryant bir niceliktir. Lorentz dönüşümleri ile birbiriyle bağlantılı olan (birbirinin içine karışan) iki fiziksel nicelik bir 4-vektör oluşturabilir. Örneğin, uzay ve zaman, enerji ve momentum, yük yoğunluğu ve akım yoğunluğu vs.

- Dört vektörleri tanıtmak için Yunan alfabesinin harflerinden yararlandığımız $(\mu, \nu, \sigma, \kappa, \lambda, \alpha, \beta$ vb) bir indis kullanırız. Bu indis 0, 1, 2 ve 3 değerlerini alır ve Lorentz indisi olarak adlandırılır.
- İlk olarak dört-konum vektörünü tanıtarak başlayalım. x^μ gibi, bir üst indisli, 4-vektöre bir ***kontravaryant dört-vektör*** ve x_μ gibi, bir alt indisli olana bir ***kovaryant dört-vektör*** denir. Burada x^μ kontravaryant dört-konum vektörü olmak üzere;

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r}) \\ x_\mu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \\ &= (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\vec{r}) \end{aligned}$$

μ : *Lorentz indisi*
$\mu = 0, 1, 2, 3$

- ***Bir kontravaryant ve bir kovaryant dört-vektörün iç çarpımı bir değişmezdir (skalerdir).*** Değişmez (invaryant) kalma kuralını *bir üst ve bir alt indis* üzerinden toplam alarak sağlarız:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3} dx^\mu dx_\mu = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$ *(Einstein toplama kuralı: Tekrarlanan indisler üzerinden toplam var. Burada tekrar eden indislerden biri altta diğeri üstte olmalıdır. Bu indise sağır (dummy) indis denir).*

- ***Metrik tensör:*** 4-lü skaler çarpımı tanımlamak için metrik tensör gereklidir. x^μ ve x_μ arasındaki (ya da herhangi bir kontravaryant vektörle onun kovaryant karşılığı arasındaki) ilişki bir ***metrik tensör*** $g_{\mu\nu}$ tanıtılarak verilebilir

İndis kontraksiyonu

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$$

$$= g_{\mu 0}x^0 + g_{\mu 1}x^1 + g_{\mu 2}x^2 + g_{\mu 3}x^3, \quad \mu = 0,1,2,3$$

Bu ifadede toplama anlaşması kullanılmıştır.

$$x_0 = x^0,\ x_i = -x^i \quad i = 1,2,3$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

burada satırlar ve sütunlar 0, 1, 2 ve 3 bileşenlerine karşılık gelmektedir. Özel görelilikte metrik pasif bir rol oynar. Uzayın geometrisi ile ilgili tüm bilgiyi içerir. Ancak genel görelilikte, uzayın geometrisi de sabit olmadığından metrik aktif bir rol oynar.

- ***Dörtlü Skaler çarpım:***
$$A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = A^0B^0 - \vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\begin{aligned} A^\mu B_\mu &= A^0B_0 + A^1B_1 + A^2B_2 + A^3B_3 \\ &= A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 \\ &= A^0B^0 - \left(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\right) = A^0B^0 - \vec{A}\cdot\vec{B} \end{aligned}$$

- ***Diferansiyel işlemciler:***

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$$
$$= (\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}) = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$$
$$= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$$

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3)$$
$$= (\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}) = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z})$$
$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$$

$\Box$: d' Alembertyen işlemcisi (Lorentz invaryant bir nicelik)

$$\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

3. Dört-hız ve Dört-ivme

Newtonyen fizikte zaman (t) mutlaktır ve zaman değişimlerin ona göre ölçüldüğü bir parametre olarak alınır. Ancak Lorentz dönüşümlerinde zaman bir parametre değildir ve t koordinatlardan bağımsız değildir. İnvaryant bir parametre olarak has zaman (τ) alınabilir. Has zaman ile zaman arasındaki ilişki;

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = \frac{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}{c^2} = \frac{c^2dt^2}{c^2} - \left(\frac{dx^2 - dy^2 - dz^2}{c^2}\right)$$
$$\frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \left(\frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{c^2}\right) = 1 - \frac{u^2}{c^2}$$
$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma} \quad \Rightarrow burada \quad \gamma \equiv \gamma(u)$$

⇨ Dört-hız şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$U^{\mu} \equiv \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^{\mu}}{dt}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma(u)$$

$$U^{\mu} = \gamma(u)\frac{d}{dt}\left(ct, \vec{r}\right) = \gamma(u)\left(c, \vec{u}\right)$$

➔ Dört-hızın dörtlü skaler çarpımı:

$$U_{\mu} = \gamma(u)(c, -\vec{u}) \Rightarrow U^{\mu}U_{\mu} = \gamma^{2}(c^{2} - \vec{u}\cdot\vec{u})$$

$$U^{\mu}U_{\mu} = c^{2}$$

⇨ Dört-ivmeyi de şu şekilde tanımlayabiliriz: $A^{\mu} \equiv \frac{dU^{\mu}}{d\tau}$

$$A^{\mu} \equiv \frac{dU^{\mu}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dU^{\mu}}{dt}$$

$$A^{\mu} = \gamma(u)\frac{d}{dt}\left(\gamma(u)c, \gamma(u)\vec{u}\right) = \gamma(u)\left(c\frac{d\gamma(u)}{dt}, \gamma(u)\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\gamma(u)}{dt}\vec{u}\right)$$

$$= \gamma(u)\left(c\dot{\gamma}(u), \gamma(u)\vec{a} + \dot{\gamma}(u)\vec{u}\right)$$

⇨ ***<u>4 vektörler nasıl dönüşür?</u>***

X^{μ} herhangi bir 4-vektör olmak üzere

$$X'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}X^{\nu} \qquad \Lambda^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Standart şekillenim için Lorentz dönüşüm matrisi