BÖLÜM-V: RELATİVİSTİK PARÇACIK MEKANİĞİ

1. Dört-Momentum (veya enerji-momentum 4-vektörü):

Newton mekaniği Galileo invaryant, Lorentz invaryant değil. Burada kuracağımız yeni mekanik, Newton mekaniğinin gravitasyonel olmayan kısmını içermelidir. Parçacık sistemleri ve parçacık çarpışmaları bu bölümün ana konusudur. Dört-kuvvetten daha önce dört-momentumu tanımlayarak bu bölüme başlamak daha uygun olur.

$$\begin{aligned} P^{\mu} &\equiv mU^{\mu} \\ P^{\mu} &= m\left(\gamma(u)c, \gamma(u)\vec{u}\right) = \left(\gamma(u)mc, \gamma(u)m\vec{u}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

*(**Lütfen dikkat:** Bazı kaynaklarda karşılaşabileceğinizin tersine, m_0' ı kütle olarak adlandırıp $m=\gamma\, m_0$ relativistik kütle terimini kullanmayacağız!)*

⇨ Bir çarpışmaya giren tüm parçacıkların 4-momentumlarının toplamı, çarpışmadan sonra açığa çıkan tüm parçacıkların 4-momentumlarının toplamına eşit olmalıdır.

2. Enerji-Kütle-Momentum Özdeşliği

Dört-momentum ifadesinde sıfırıncı bileşen (zaman bileşeni) ne anlama geliyor? Bu bileşen sanki kütlenin korunumu gibi görünse de öyle olmadığı hemen anlaşılıyor. ***Klasik olarak*** kütle korunumludur ve radyasyona dönüşemez. Ancak elektron-pozitron çiftinin yok olarak iki fotona dönüşmesi gibi kütlenin radyasyona dönüştüğü örnekleri biliyoruz. Bu nedenle, bu sıfırıncı bileşen enerjinin korunumu ile ilgili olmalı.

⇨ $E_0=mc^2$: *Durgunluk enerjisi (ya da durgun kütle enerjisi)* ➔ Bir cismin durumunun nicel bir ölçüsü olan; hareketi ile ilgili olmayan bir enerjidir. Enerji-kütle özdeşliği başka bir aksiyomdan çıkarılamaz.

⇨ $E=\gamma(u)mc^2$ *toplam göreli enerji*
$\vec{p}=\gamma(u)m\vec{u}$ *toplam göreli* $3-$*momentum*

⇨ Bu tanımları kullanarak, 4-momentum vektörünü şu şekilde de yazabiliriz:

$$P^\mu=\left(\frac{E}{c},\vec{p}\right),\quad P_\mu=\left(\frac{E}{c},-\vec{p}\right) \qquad (2)$$

⇨ (1) denkleminden;

$$P^\mu=\left(\gamma(u)mc,\gamma(u)m\vec{u}\right) \qquad P_\mu=\left(\gamma(u)mc,-\gamma(u)m\vec{u}\right)$$

$$P^2=P^\mu P_\mu=\gamma^2(u)m^2\left(c^2-u^2\right)=\frac{c^2}{\left(c^2-u^2\right)}m^2\left(c^2-u^2\right)=m^2c^2 \qquad (3)$$

⇨ (2) denkleminden;

$$P^2=P^\mu P_\mu=\frac{E^2}{c^2}-\vec{p}\cdot\vec{p}=\frac{E^2}{c^2}-p^2 \qquad (4)$$

⇨ (3) ve (4) denklemleri birleştirilerek göreli enerji-momentum-kütle özdeşliği elde edilir;

$$\frac{E^2}{c^2}-p^2=m^2c^2$$

- ***Kütlesiz parçacık için 4-momentum:***
  $m=0$ için u=c' dir. Foton kütlesiz bir parçacıktır (elektromanyetik alanın kuantumudur). Fotonun enerjisini ve momentumunu belirleyen tek şey frekansıdır.

  $E=hf$ ve enerji-momentum-kütle özdeşliğinden $E=|\vec{p}|c$ ➔ fotonun momentumun büyüklüğü $|\vec{p}|=\dfrac{hf}{c}$ olarak elde edilir. Momentumun yönünü belirleyen bir $\hat{n}$ vektörü de ekleyerek, kütlesiz parçacık için 4-momentum vektörü şu şekilde yazılır:

$$P^\mu=\frac{hf}{c}(1,\hat{n}) \qquad f:\ frekans$$

- ***Göreli kinetik enerji:***

  Toplam göreli enerji için seri açılımı yapalım:

$$E=\gamma mc^2=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}mc^2$$

Bir fonksiyonun x=a noktası etrafında Taylor seri açılımı

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ şeklindedir. $a=0$ için seri Maclaurin serisi adını alır.

$\frac{u^2}{c^2}=x \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-1/2}$ alarak

$$E=mc^2\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^2+\ldots\right)$$

$$=mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}-\frac{3}{8}\left(\frac{u^2}{c^2}\right)^2+\ldots\right)$$

$$=\underbrace{mc^2}_{\text{Durgunluk enerjisi}}+\underbrace{\frac{1}{2}mu^2}_{\text{Klasik kinetik enerji}}-\frac{3}{8}m\left(\frac{u^4}{c^2}\right)+\ldots$$

$u<<c$ için ihmal

⇨ Buna göre göreli kinetik enerji şu şekildedir: $K=(\gamma-1)mc^2$

- ***<u>4-momentum vektörünün dönüşümü:</u>***

4-momentum vektörü de bir 4-vektör olduğu için Lorentz dönüşümleri altında şu şekilde dönüşür:

$$P'^{\mu}=\Lambda^{\mu}_{\nu}P^{\nu} \qquad \Lambda^{\mu}_{\ \nu}=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

➔ Standart şekillenim için Lorentz Dönüşüm matrisi

$$P'^0=\gamma\left(P^0-\beta P^1\right)$$
$$P'^1=\gamma\left(P^1-\beta P^0\right)$$
$$P'^2=P^2$$
$$P'^3=P^3$$

$$P'^{\mu}=\left(\frac{E'}{c},\vec{p}\,'\right)=\left(\frac{E'}{c},p'_x,p'_y,p'_z\right)$$
$$P^{\nu}=\left(\frac{E}{c},\vec{p}\right)=\left(\frac{E}{c},p_x,p_y,p_z\right)$$

olmak üzere;

$$\frac{E'}{c}=\gamma\left(\frac{E}{c}-\beta p_x\right) \Rightarrow E'=\gamma\left(E-vp_x\right)$$

$$p'_x=\gamma\left(p_x-\beta\frac{E}{c}\right) \Rightarrow p'_x=\gamma\left(p_x-\frac{v}{c^2}E\right)$$

$$p'_y=p_y$$

$$p'_z=p_z$$