Grafik Çizimi

Bir fonksiyonun grafigi sonsuz çoklukta nokta içerebileceğinden, bu noktaları koordinat düzleminde işaretlemek mümkün olmayabilir. Ayrıca eğri üzerindeki bir kaç noktanın belirlenerek grafiğin çizilmesi de sağlıklı olmaz. Çünkü böyle bir durumda iki nokta arasında kalan parçanın davranışı hakkında kesin bir bilgi bulunmaz. Bu nedenle fonksiyonun bazı özelliklerini kullanarak grafiğini düzgün bir şekilde çizebiliriz. Bu özelliklerin başında fonksiyonun kritik noktaları ile artanlık ve azalanlık kavramları gelmektedir. Yine fonksiyonun konvekslik ve konkavlık durumu ile varsa asimtotlarının belirlenmesi grafiğin daha net çizilmesinde yarar sağlar. Grafik çizimine geçmeden fonksiyonun konvekslik ve konkavlık durumu ile asimtotlarının nasıl belirleneceğini inceleyelim.

Düzlemde bir kümenin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası yine bu küme içinde kalıyorsa bu kümeye konveks küme adı verilir. Örneğin üçgenlerin, karelerin ve çemberlerin iç bölgeleri birer konveks kümedir. Ancak düzlemde yıldız şeklinde bir küme konveks değildir.

Bu düşünce ile $[a, b]$ üzerinde tanımlı sürekli bir f fonksiyonu verildiğinde eğer fonksiyonun grafiğinin üst tarafında kalan bölge konveks ise f fonksiyonu **konvekstir** veya **yukarı bükümlüdür** denir. Eğer fonksiyonun grafiğinin alt tarafında kalan bölge konveks ise f fonksiyonu **konkavdır** veya **aşağı bükümlüdür** denir. Örneğin $y = x^2$ fonksiyonu konveks, $y = 1 - x^2$ fonksiyonu konkavdır. Yine $y \stackrel{3}{=} x$ fonksiyonu $(-\infty, 0]$ aralığında konkav, $[0, \infty)$ aralığında konvekstir.

Buradan da anlaşılacağı üzere x, (a, b) aralığında artarken f nin grafiğine teğet olan doğruların eğimleri artarsa fonksiyon bu aralıkta konvekstir. Eğer teğet olan doğruların eğimleri azalırsa fonksiyon bu aralıkta konkavdır. Buna göre aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım *f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir olsun.*

1. *Eğer f' fonksiyonu (a, b) aralığında artan ise f nin grafiği bu aralıkta konvekstir.*
2. *Eğer f' fonksiyonu (a, b) aralığında azalan ise f nin grafiği bu aralıkta konkavdır.*

Bir fonksiyonun artan ve azalan olduğu bölgeleri onun türevinini işareti yardımıyla belirlenebilmektedir. Eğer (a, b) aralığında f' fonksiyonu türevlenebilir ve bu aralıktaki her x için $(f')'(x) = f''(x) > 0$ ise f' fonksiyonu artan, dolayısıyla f fonksiyonu konvekstir. Eğer (a, b) aralığındaki x için $(f')'(x) = f''(x) < 0$ ise f' fonksiyonu azalan, dolayısıyla f fonksiyonu konkavdır. Buna göre f fonksiyonunu ikinci türevinin işareti yardımıyla konveks ve konkav olduğu aralıkları belirleyebiliriz.

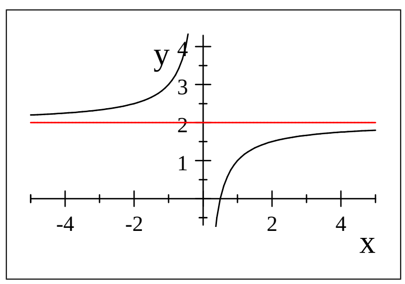
Şimdi de grafik çiziminde kullanılacak bir başka kavran olan asiptot ile ilgili bazı temel bilgiler verelim. Asimtot kavramının daha bilimsel bir tanımının olmasına rağmen kabaca fonksiyonun grafiğinin sonsuzda teğet olduğu eğri veya doğru olarak tanımlayabiliriz. Asiptotlar, Yatay-Eğik-Eğrisel Asiptotlar ve Düşey Asimtotlar olmak üzere iki guruba ayrılır.

1-) Yatay-Eğik-Eğrisel Asiptotlar: $y = f(x)$ fonksiyonu $x \to \pm\infty$ için $g(x) \to 0$ olmak üzere

$$f(x) = \phi(x) + g(x)$$

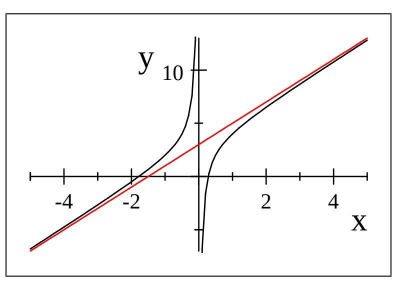
biçiminde yazılabiliyorsa $\phi(x)$ fonksiyonu f fonksiyonunu grafiğinin bir asimtotu olur. Eğer $\phi(x) = a$ (sabit) biçiminde ise yatay asimtot, $\phi(x) = ax + b$ biçiminde ise eğik asimtot ve derecesi birden büyük bir polinom ise eğrisel asimtot olur. Yatay, eğik ve eğrisel asimtotlardan bir tanesi var ise diğerleri var olmaz. Fonksiyonun grafiği sonsuzda asimtota teğet olduğundan fonksiyonun grafiği bazı hallerde bu tip asimtotları sonlu x değerlerine karşılık gelen noktalarda kesebilir.

Örnek 224 *$f(x) = \frac{2x-1}{x}$ fonksiyonu $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ biçiminde yazılabilir. Burada $\phi(x) = 2$ ve $g(x) = -\frac{1}{x}$ olarak düşünüldüğünde $\phi(x) = 2$ nin bir yatay asimtot olduğu görülebilir. Dikkat edilirse $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ dir. Bu fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir.*

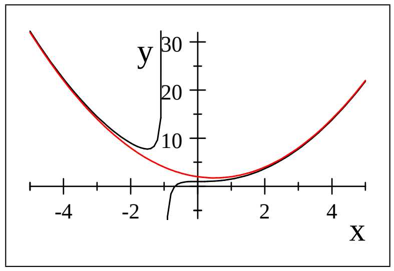


Uyarı 225 *Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu bir rasyonel fonksiyon ise bir polinom bölmesi işlemi ile yatay, eğik veya eğri asimtot bulunabilir.*

Örnek 226 *$f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x}$ fonksiyonu $f(x) = 2x+3-\frac{1}{x}$ biçiminde yazılabilir. Buradan $\phi(x) = 2x + 3$ bu fonksiyonun bir eğik asimtotu olur.*

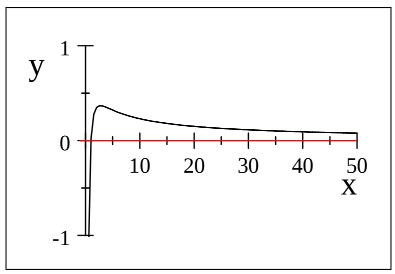


Örnek 227 *$f(x) = \frac{x^3+x+1}{x+1}$ fonksiyonu ise $f(x) = x^2 - x + 2 - \frac{1}{x+1}$ biçiminde yazılabileceğinden $\phi(x) = x^2 - x + 2$ eğrisi f nin bir eğrisel asimtotu olur.*



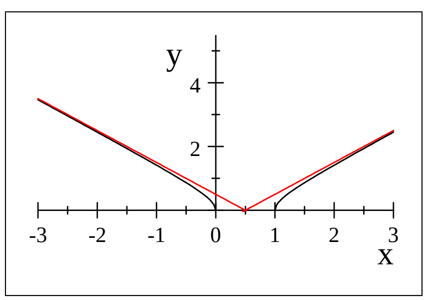
Uyarı 228 *Rasyonel fonksiyonların bu tip asimtotlarını bulmak kolay olmasına rağmen bu durum her hangi bir fonksiyon için bu kadar kolay olmayabilir. Ancak eğer* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$ *oluyorsa* $\phi(x) = a$ *sabiti* f *nin yatay asimtotu olur.*

Örnek 229 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ *fonksiyonu için* $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ *olduğundan* $\phi(x) = 0$ *yatay asimtottur.*



Uyarı 230 $a > 0$ *olmak üzere* $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ *tipindeki fonksiyonlar için* $\phi(x) = \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right|$ *fonksiyonu eğik asimtottur.* $x \to \infty$ *için* ϕ *nin pozitif parçası,* $x \to -\infty$ *için negatif parçası kullanulır.* $a < 0$ *için* f *nin asimtotu yoktur.*

Örnek 231 $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ *egrisi için* $\phi_1(x) = x - \frac{1}{2}$ *ve* $\phi_2(x) = -x + \frac{1}{2}$ *eğik asimtotlardır.*



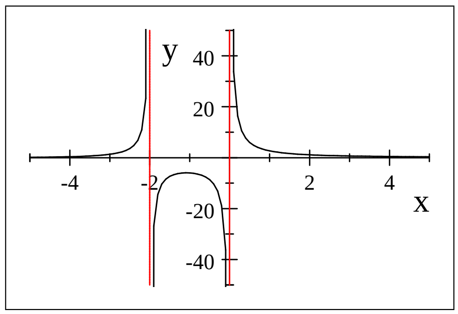
2-) Düşey Asiptotlar: a bir reel sayı olmak üzere

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty, \ \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty, \ \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, \ \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

eşitliklerinden biri sağlanıyorsa $x = a$ doğrusuna $y = f(x)$ fonksiyonunu grafiği için bir düşey asimtottur denir. Fonksiyonların grafikleri düşey asimtotları kesmez.Bir fonksiyounu birden fazla düşey asimtotu olabilir

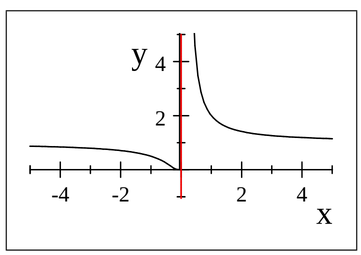
Uyarı 232 *$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ tipinde rasyonel bir fonksiyon için $Q(x) = 0$ denkleminin kökleri düşey asimtot olabilir. Bu denklemin bir kökü $P(x) = 0$ denkleminin bir kökü deyilse bu bir yatay asimtottur. Eğer bu kök aynı zamanda $P(x) = 0$ denkleminin de bir kökü ise bu noktada f nin limitine bakmak gerekir.*

Örnek 233 *$f(x) = \frac{x^2+5x-14}{x^3-4x}$ eğrisinin düşey asimtotlarını bulalım. $x^3 - 4x = 0$ ise $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ ve $x_3 = 2$ olur. Bunlardan $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ düşey asimtotturlar, ancak $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{9}{8}$ olduğundan $x_3 = 2$ düşey asimtot değildir.*



Uyarı 234 *Rasyonel fonksiyonlar için düşey asimtot bulmak için paydanın köklerini bulmak işi kolaylaştırmaktadır. Ancak herhangi bir fonksiyon için limit alınması gereken a sayısını tahmin etmek gerekir.*

Örnek 235 *$f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ eğrisi için $x = 0$ doğrusundan başka bir doğrunun düşey asimtot olamayacağını anlamak gerekmektedir. Bu noktada ise $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ olduğundan $x = 0$ bir düşey asimtottur. Dikkat edelimki burada $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ dır.*



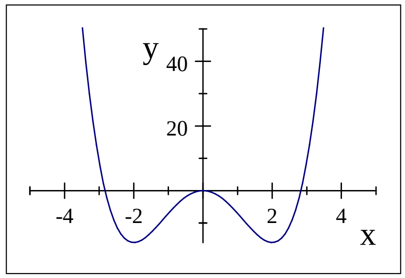
Yukarıda belirtilen bilgiler dikkate alınarak bir fonksiyonun grafiği çizilebilir. Bunun için aşağıda bahsedilen yolu izlemekte yarar vardır.

1. İlk olarak fonksiyonun tanım kümesi bulunur.
2. Asimtotlar bulunur.
3. Eğrinin koordinat eksenlerini kestiği noktalar bulunur.
4. Birinci türevin işareti incelenir. Böylece fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklar ile yerel ekstremum noktaları tesbit edilir.

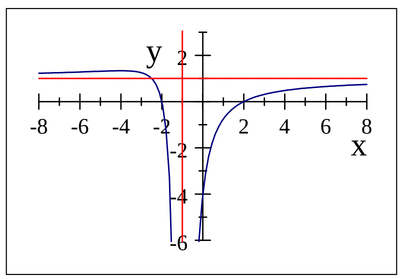
5. İkinci türevin işareti incelenir. Böylece fonksiyonun konveks ve konkav oluğu aralıklar ile büküm noktaları tesbit edilir.

6. Bu bilgiler bir tablo haline dönüştürülerek grafik çizilir.

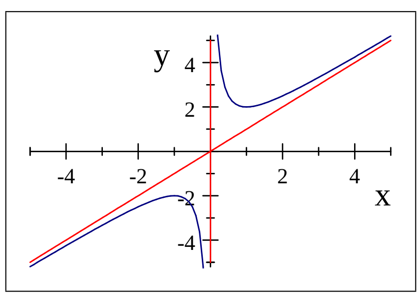
Örnek 236 $f(x) = x^4 - 8x^2$



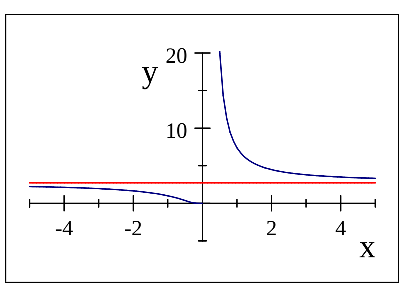
Örnek 237 $f(x) = \frac{x^2-4}{(x+1)^2}$



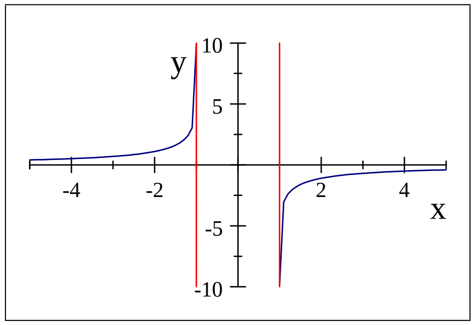
Örnek 238 $f(x) = x + \frac{1}{x}$



Örnek 239 $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$



Örnek 240 $f(x) = \ln(\frac{x-1}{x+1})$



4.8 Ek Sorular

Örnek 241 *Aşağıda verilen fonksiyonların grafiğini türev yardımıyla çiziniz.*

1. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$
2. $f(x) = \frac{x^3+2}{x}$
3. $f(x) = x^2 e^{-x}$
4. $f(x) = xe^{1-x^2}$
5. $f(x) = 1 - (x-2)^{\frac{2}{3}}$
6. $f(x) = x\,(x-1)^{2/3}$