2.9. Değişken Değiştirme Yöntemi

Bazı diferensiyel denklemler önceki bölümlerde gördüğümüz denklem modellerine uygun olmaz iken, uygun bir değişken değiştirme ile bilinen denklemlerden birine dönüşebilir. Şimdi buna ilişkin bazı örnekler verelim.

Örnek 1. $(x+y)^2\, y' = 1$ denkleminin çözümünü bulunuz.
Çözüm. $x + y = u$ değişken değiştirmesi uygulanırsa

$$u^2\,(u'-1) = 1$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{u^2+1}du &= dx \\ 1 - \frac{1}{u^2+1}du &= dx \end{aligned}$$

değişkenlerine ayrılabilir denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$u - \arctan u = x + c$$

formunda olup $x + y = u$ dan verilen denklemin çözümü

$$y - \arctan(x+y) = c$$

olarak bulunur.

Örnek 2. $(1+\cos(x-2y))\, y' = \sin(x-2y) + \frac{1}{2}\cos(x-2y) + \frac{1}{2}$ denkleminin çözümünü bulunuz.
Çözüm. $x - 2y = u$ değişken değiştirmesi uygulanırsa $1 - 2y' = u'$ den

$$\begin{aligned} (1+\cos u)(1-u') &= 2\sin u + \cos u + 1 \\ 1 - u' &= \frac{2\sin u + \cos u + 1}{1+\cos u} \\ u' &= 1 - \frac{2\sin u + \cos u + 1}{1+\cos u} \end{aligned}$$

olup buradan $\dfrac{1+\cos u}{\sin u}du = -2dx$ değişkenlerine ayrılabilir denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{\sin u} + \frac{\cos u}{\sin u}\right) du &= -2\int dx \\ -\ln|\cot u + \csc u| + \ln|\sin u| &= -2x + \ln c \\ \left|\frac{\sin u}{\cot u + \csc u}\right| &= ce^{-2x} \end{aligned}$$

$x - 2y = u$ yerine yazılırsa verilen denklemin çözümü

$$\left|\frac{\sin(x-2y)}{\cot(x-2y)+\csc(x-2y)}\right| = ce^{-2x}$$

formunda bulunur.

Örnek 3. $\dfrac{y'}{(1+2y)^2} - \dfrac{1}{2x(1+2y)} = \dfrac{1}{2x}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. $\dfrac{1}{1+2y} = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa $\dfrac{-2y'}{(1+2y)^2} = u'$ den

$$\begin{aligned} -\frac{u'}{2} - \frac{u}{2x} &= \frac{1}{2x} \\ \frac{du}{u+1} &= -\frac{dx}{x} \end{aligned}$$

değişkenlerine ayrılabilir denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü $x(u+1) = c$ formundadır. $\dfrac{1}{1+2y} = u$ yerine yazılırsa verilen denklemin çözümü c keyfi parametre olmak üzere

$$\frac{x(2y+2)}{2y+1} = c$$

şeklinde elde edilir.