3. Diferensiyel Denklemlerin Uygulamaları

3.1. Artma-Azalma Problemleri

Radyoaktif Bozunma Problemleri

Plütonyum, Radyum ve C14 olarak bilinen Karbon izotopu gibi bazı radyoaktif elementlerin diğer bir elemente dönüştüğü bilinmektedir. Bozunmanın hızı genellikle mevcut element miktarıyla orantılı olarak değişir. Madde miktarının değişimini veren diferensiyel denklem

$$\frac{dM}{dt} = -kM$$

formundadır. $k > 0$ bozunma sabitidir. Bu denklemin çözümü

$$M(t) = ce^{-kt}$$

şeklindedir.

Örnek 1. Bir radyoaktif element olan Toryum–234 (Th234) izotopu , β ışınları yayarak Pa234'ye dönüşmektedir. Bu izotopun bozunma hızı, elementin mevcut miktarı ile doğru orantılıdır. Ayrıca 120 mg Th–234 izotopunda beş gün içinde geriye 96 mg kaldığı bilindiğine göre,

a) Herhangi bir t anında geriye ne kadar Th-234 kaldığını bulunuz.

b) Mevcut miktarın yarıya inmesi için ne kadar zaman geçmesi gerektiğini bulunuz.

Çözüm.

(a) Verilenlere göre $M_0 = 120$ mg ($t = 0$ anında), $M(t = 5 \text{ gün}) = 96$ mg dir. Madde zamanla azaldığından ve azalma hızı mevcut madde miktarı ile orantılı olduğundan madde miktarının değişimini veren diferensiyel denklem

$$\frac{dM}{dt} = -kM \quad , \quad k > 0$$

formundadır. Bu denklem çözülürse

$$M(t) = ce^{-kt}$$

elde edilir. $M(0) = 120$ olduğundan $c = 120$ olur. $M(5) = 96$ olduğundan $M(5) = 96 = 120e^{-5k}$ olup $k = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{96}{120}\right) = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{4}{5}\right) = 0,0446$ gün elde edilir. Dolayısıyla herhangi bir t anındaki bozunmamış madde miktarı

$$M(t) = 120e^{-0,0446t}$$

dir.

b) $60 = 120e^{-0,0446t}$ den $t = \dfrac{\ln 2}{0,0446} = 15,54$ gün.

Örnek 2. Bir maddenin kimyasal reaksiyon sonucu başka bir maddeye dönüştüğü bilinmektedir. Dönüşüm hızı maddenin mevcut miktarı ile orantılı olup, başlangıçta M_0 miktarda olan bu maddenin 20 dakika içinde maddenin %16 'sı başka bir maddeye dönüşmektedir. Herhangi bir t anında başlangıç maddesinden geriye ne kadar kaldığını veren formülü bulunuz.

Çözüm. Başlangıçtaki madde miktarı M_0 olup $M(0) = M_0$ dır. Yine $M(20) = \dfrac{84}{100}M_0$ dır.

$$M\left(t\right) = ce^{-kt}$$

çözümüne bu veriler uygulanırsa $M(0) = M_0$ dan $c = M_0$ bulunur. Diğer yandan,

$$M(20) = \frac{84}{100}M_0 = M_0e^{-20k}$$

dan $k = \dfrac{-1}{20}\ln\left(\dfrac{84}{100}\right) = 0.0087$ elde edilir. Herhangi bir t anındaki bozunmamış madde miktarı

$$M\left(t\right) = M_0e^{-0.0087t}$$

dir.

3.2.Sıcaklık Problemleri

Herhangi bir anda cismin sıcaklığı $T\left(t\right)$, dış ortamın sıcaklığı da $T_{dıs}$ olsun. Newton'un soğuma yasasından cismin sıcaklığının değişim hızı

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_{dıs}\right) \quad , \quad k > 0$$

denklemi ile verilir.

Örnek 3. Sıcaklığı 90^oF olan bir cisim 40^oF sıcaklığındaki bir odaya bırakılıyor. 12 dakika sonunda cismin sıcaklığının 72^oF 'ye düştüğü görülüyor. Başlangıç anından itibaren ne kadar zaman sonra cismin sıcaklığının 50^oF 'ye düşeceğini bulunuz.

Çözüm.

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_{dıs}\right) \quad , \quad k > 0$$

denkleminin genel çözümü

$$T\left(t\right) = T_{dıs} + ce^{-kt}$$

dir. $t=0$ için $T=T_0$ olduğundan $c=T_0-T_{dıs}$ olup

$$T(t)=T_{dıs}+(T_0-T_{dıs})\,e^{-kt}$$

dir. Buradan

$$T(t)=40+50e^{-kt}$$

sağlanır. $T(12)=72$ olduğundan

$$72=40+50e^{-12k}$$

olup $k=-\dfrac{\ln\left(\frac{32}{50}\right)}{12}=0,0371$ olarak elde edilir. Buradan herhangi bir t anında cismin sıcaklığı $T(t)=40+50e^{-0,0371t}$ olur. $T=50^oF$ için

$$50=40+50e^{-0,0371t}$$

eşitliğinden $t=\dfrac{\ln 5}{0,0371}=43.38$ dakika