## 5. LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

$f$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında tanımlı olsun. $s$ reel bir parametre olmak üzere

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)\,dt$$

genelleştirilmiş integrali yakınsak ise integralin değerine $f$ fonksiyonunun **Laplace dönüşümü** denir ve $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ile gösterilir.

**Örnek 1.** $t \geq 0$ için $f(t) = 1$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{1\} &= F(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st}dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \left.\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right|_0^A \\
&= \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{s}e^{-As} + \frac{1}{s}\right)
\end{aligned}$$

olup $s > 0$ için $\lim\limits_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{s}e^{-As} + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$, $\quad s < 0$ için $\lim\limits_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{s}e^{-As} + \frac{1}{s}\right) = \infty$ dur. Ayrıca $s = 0$ için integral ıraksaktır. Dolayısıyla $s > 0$ için integral yakınsak olup

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad , \quad s > 0$$

dır.

**Örnek 2.** $t \geq 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ için $f(t) = e^{at}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} &= F(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-t(s-a)}dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \left.\left(-\frac{1}{s-a}e^{-t(s-a)}\right)\right|_0^A \\
&= \frac{1}{s-a} \quad , \quad s > a
\end{aligned}$$

dır.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\} &= \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad , n \in \mathbb{N} \ , \quad s > 0 \\
\mathcal{L}\{\sin at\} &= \frac{a}{s^2+a^2} \ , \quad \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2} \quad , \quad s > 0
\end{aligned}$$

dır.

**Tanım:** $t \geq t_0$ için tanımlı $f(t)$ fonksiyonu için

$$e^{-\alpha t} |f(t)| \leq K$$

sağlanacak şekilde $\alpha,\ K > 0$ sayıları mevcutsa $f(t)$ fonksiyonuna $\alpha-$üstel basamaktandır denir.

**Teorem 1.** Reel değerli $f(t)$ fonksiyonu her sonlu $a \leq t \leq b$ aralığında parçalı sürekli ve $\alpha-$üstel basamaktan ise $s > \alpha$ için $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü mevcuttur.

**Laplace Dönüşümünün Temel Özellikleri**

**Teorem 2 (Lineerlik Özelliği):** $f_1,\ f_2, ..., f_n$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri mevcut olsun. $c_1,\ c_2, ..., c_n$ 'ler keyfi sabitler olmak üzere

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + ... + c_n f_n(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} + ... + c_n \mathcal{L}\{f_n(t)\}$$

dir.

**Teorem 3 (Öteleme Özelliği):** $s > \alpha$ için $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise

$$\mathcal{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = F(s-a) \quad , \quad s > \alpha + a$$

dır..

**Teorem 4:** $s > \alpha$ için $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ mevcut ise

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

dir.

**Teorem 5:** $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ve $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t)}{t}$ mevcut ise $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^{\infty} F(u)\, du$

dur.

**Teorem 6:** $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ mevcut ise $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t f(u)\, du\right\} = \dfrac{1}{s} F(s)$ dir.

**Örnek 3.** $\mathcal{L}\left\{t^2 e^{2t}\right\}$ Laplace dönüşümünü bulunuz.

**Çözüm.** $F(s) = \mathcal{L}\left\{t^2\right\} = \dfrac{2}{s^3}$ , $s > 0$ olduğundan öteleme özelliğinden $\mathcal{L}\left\{t^2 e^{2t}\right\} = F(s-2) = \dfrac{2}{(s-2)^3}$ , $s > 2$ bulunur.

**Örnek 4.** $\mathcal{L}\left\{\cos^2 t\right\}$ Laplace dönüşümünü bulunuz.
**Çözüm.**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\cos^2 t\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1+\cos 2t}{2}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{1\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\cos 2t\right\} = \frac{1}{2s}+\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4}\end{aligned}$$

**Örnek 5.** $\mathcal{L}\left\{t\sin t\right\}$ Laplace dönüşümünü bulunuz.
**Çözüm.** $F(s)=\mathcal{L}\left\{\sin t\right\}=\dfrac{1}{s^2+1}$ olduğundan

$$\mathcal{L}\left\{t\sin t\right\} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

dir.

**Örnek 6.** $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin at}{t}\right\}$ Laplace dönüşümünü bulunuz.
**Çözüm.** $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin at}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^\infty \frac{a}{u^2+a^2}du = \arctan\frac{u}{a}\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s}{a}$

**Birim Basamak Fonksiyonu**

$a\geq 0$ olmak üzere birim basamak fonksiyonu

$$u_a(t)=u(t-a)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t\geq a\end{cases}$$

olarak tanımlanır. $u_a(t)$ fonksiyonu parçalı sürekli ve üstel basamaktan olup $\mathcal{L}\left\{u_a(t)\right\}$ Laplace dönüşümü mevcuttur.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{u_a(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}u_a(t)\,dt = \int_0^a e^{-st}u_a(t)\,dt+\int_a^\infty e^{-st}u_a(t)\,dt\\ &= \int_a^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}e^{-as} \quad , \quad s>0\end{aligned}$$

dır. $s>\alpha$ için $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=F(s)$ mevcut ise $\mathcal{L}\left\{u_a(t)f(t-a)\right\}=e^{-sa}F(s)$ dir.