Laplace Dönüşümü Yardımıyla Lineer Diferensiyel Denklemlerin Çözümü

$$\begin{array}{c} a_0(t)\,y^{(n)} + a_1(t)\,y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)\,y' + a_n(t)\,y = f(t) \\ y(0) = c_1,\ y'(0) = c_2, ..., y^{(n-1)}(0) = c_n \end{array} \tag{1}$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

$t \geq 0$ için tanımlı reel değerli y fonksiyonunun $y', y'', ..., y^{(n-1)}$ türevleri var, sürekli ve aynı üstel basamaktan fonksiyonlar olsun. $y^{(n)}$, $[0, \infty)$ da parçalı sürekli olsun. Bu durumda $y, y', y'', ..., y^{(n)}$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri mevcut olup $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{y^{(n)}(t)\right\} &= s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - ... - y^{(n-1)}(0) \qquad (2) \\ &= s^n Y(s) - c_1 s^{n-1} - c_2 s^{n-2} - ... - c_n \end{aligned}$$

dir. $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ olmak üzere (1) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{L}\left\{a_0(t)\,y^{(n)}\right\} + \mathcal{L}\left\{a_1(t)\,y^{(n-1)}\right\} + ... + \mathcal{L}\{a_{n-1}(t)\,y'\} + \mathcal{L}\{a_n(t)\,y\} = F(s)$$

olur. Bu eşitlikten $Y(s)$ fonksiyonu bulunur, sonra da ters Laplace dönüşümü uygulanırsa başlangıç değer probleminin çözümü

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

olarak elde edilir.

Örnek 1.

$$y'' + 3y' + 2y = e^{2t} \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0$$

başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Diferensiyel denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\} \\ s^2 Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) &= \frac{1}{s-2} \\ \left(s^2 + 3s + 2\right) Y(s) &= \frac{1}{s-2} \\ Y(s) &= \frac{1}{(s-2)(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

olur.

$$\frac{1}{(s-2)(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

formunda basit kesirlerine ayrılırsa $A = \frac{1}{12}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{4}$ bulunur. Başlangıç değer probleminin çözümü

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{12}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ &= \frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2t} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.

$$ty'' - 2ty' - 2y = 0 \quad , \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Diferensiyel denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanır ve

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

özelliğinden yararlanılırsa, $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty''\} - 2\mathcal{L}\{ty'\} - 2\mathcal{L}\{y\} &= 0 \\ -\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s) - 1\right) + 2\frac{d}{ds}(sY(s)) - 2Y(s) &= 0 \\ -2sY(s) - s^2Y'(s) + 2Y(s) + 2sY'(s) - 2Y(s) &= 0 \\ \left(2s - s^2\right)Y'(s) - 2sY(s) &= 0 \\ \frac{Y'(s)}{Y(s)} + \frac{2}{s-2} &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \ln Y(s) + 2\ln(s-2) &= \ln c \\ Y(s) &= \frac{c}{(s-2)^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = c\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = cte^{2t}$$

elde edilir. $y'(t) = ce^{2t} + 2cte^{2t}$ olup $y'(0) = 1$ koşulu uygulanırsa $c = 1$ bulunur. Böylelikle başlangıç değer probleminin çözümü

$$y(t) = te^{2t}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3. $y'' - y' + y = e^{2t} + t \quad , \quad y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = 0$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Örnek 4. $y'' + y = \cos 2t \quad , \quad y(0) = 0 \ , \quad y'(0) = 0$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.