2.5. İntegral Çarpanı

$$P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=0$$

diferensiyel denklemi tam diferensiyel değil ancak $\lambda=\lambda\left(x,y\right)$ ile çarpıldığında denklem tam diferensiyel oluyorsa $\lambda=\lambda\left(x,y\right)$ fonksiyonuna bir integral çarpanı denir.

İntegral çarpanı için bazı özel durumlar aşağıdaki gibidir:

i) *Sadece x değişkenine bağlı integral çarpanı:*

$\dfrac{P_y-Q_x}{Q}=g\left(x\right)$ oluyorsa diferensiyel denklem sadece x değişkenine bağlı

$$\lambda\left(x\right)=e^{\int g(x)dx}$$

formunda bir integral çarpanına sahiptir.

ii) *Sadece y değişkenine bağlı integral çarpanı:*

$\dfrac{P_y-Q_x}{-P}=g\left(y\right)$ oluyorsa diferensiyel denklem sadece y değişkenine bağlı

$$\lambda\left(y\right)=e^{\int g(y)dy}$$

formunda bir integral çarpanına sahiptir.

iii) *Sezgisel Yolla:*

Diferensiyel denklem aşağıdaki diferensiyel gruplarlar yardımıyla gerekli düzenlemelerden sonra tam diferensiyel forma dönüştürülebilir.

$$\begin{aligned}
\frac{xdy-ydx}{x^2} &= d\left(\frac{y}{x}\right)\\
\frac{ydx-xdy}{y^2} &= d\left(\frac{x}{y}\right)\\
\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} &= d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)\\
\frac{xdy-ydx}{xy} &= d\left(\ln\frac{y}{x}\right)\\
ydx+xdy &= d\left(xy\right)\\
2xdx+2ydy &= d\left(x^2+y^2\right)
\end{aligned}$$

iv) $\dfrac{P_y - Q_x}{Qv_x - Pv_y} = g(v)$ ise denklem $\lambda = \lambda(v)$ formunda bir integral çarpanı vardır ve

$$\lambda(v) = e^{\int g(v)dv}$$

olarak bulunur.

Örnek 1. $2xydx + \left(y^2 - 3x^2\right) dy = 0$ diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. $\dfrac{P_y - Q_x}{-P} = \dfrac{2x + 6x}{-2xy} = -\dfrac{4}{y}$ olup sadece y'ye bağlı

$$\lambda(y) = e^{-\int \frac{4}{y} dy} = \frac{1}{y^4}$$

formunda bir integral çarpanı vardır. Denklem $\lambda(y) = \frac{1}{y^4}$ ile çarpılırsa tam diferensiyel

$$\frac{2x}{y^3}dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right) dy = 0$$

denklemi elde edilir. Öyle bir $u = u(x, y)$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2x}{y^3} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu iki eşitlikten yararlanarak verilen denklemin genel çözümü

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$$

olarak bulunur.

Örnek 2. $\left(x^2 + 2y^2 + 1\right) dx + 2xydy = 0$ diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{4y - 2y}{2xy} = \dfrac{1}{x}$ olup sadece x'ye bağlı

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$$

formunda bir integral çarpanı vardır. Denklem $\lambda(x) = x$ ile çarpılırsa tam diferensiyel

$$\left(x^3 + 2xy^2 + x\right) dx + 2x^2ydy = 0$$

denklemi elde edilir. Öyle bir $u = u(x, y)$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= x^3 + 2xy^2 + x \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= 2x^2 y
\end{aligned}$$

sağlanmalıdır. Bu iki eşitlikten $u(x, y) = \dfrac{x^4}{4} + x^2y^2 + \dfrac{x^2}{2} + c_1$ bulunur. Denklemin genel çözümü c keyfi sabit olmak üzere

$$\frac{x^4}{4} + x^2y^2 + \frac{x^2}{2} = c$$

formundadır.

Örnek 3. $x^2y^2dx + \left(x^3y - 3xy^2 + xy\right)dy = 0$ diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Sezgisel yolla gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
x^2y^2dx + \left(x^3y - 3xy^2 + xy\right)dy &= 0 \\
x^2y^2dx + x^3ydy &= x\left(3y^2 - y\right)dy \\
yx^2\left(ydx + xdy\right) &= x\left(3y^2 - y\right)dy \\
yx^2d(xy) &= x\left(3y^2 - y\right)dy
\end{aligned}$$

elde edilir. Denklem $\dfrac{1}{x}$ ile çarpılırsa

$$xyd(xy) = \left(3y^2 - y\right)dy$$

tam diferensiyel denklemi elde edilir. Eşitliğin her iki yanının integralini alırsak

$$\frac{x^2y^2}{2} = y^3 - \frac{y^2}{2} + c$$

bulunur. (Burada integral çarpanı $\lambda = \dfrac{1}{x}$ dir.)

Örnek 4. $\left(x^4 + 2y\right)dx - xdy = 0$ denklemini çözünüz.
Çözüm. $P(x, y) = x^4 + 2y$ ve $Q(x, y) = -x$ için $P_y = 2$, $Q_x = -1$ olduğundan denklem tam değildir.

$$\begin{aligned}
\frac{P_y - Q_x}{Q} &= \frac{3}{-x} = g(x) \\
&\Rightarrow \lambda(x) = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = \frac{1}{x^3} \quad \text{(sadece } x \text{ e bağlı integrasyon çarpanı)}
\end{aligned}$$

Denklem $\frac{1}{x^3}$ ile çarpılarak

$$\left(x + \frac{2y}{x^3}\right) dx - \frac{1}{x^2} dy = 0$$

elde edilir. Denklem tam diferensiyeldir. O halde öyle bir $u(x, y)$ fonksiyonu vardır ki

$$\begin{aligned} u_x &= x + \frac{2y}{x^3} \\ u_y &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

denklemlerini sağlar. Böylece

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{x^2}{2} - \frac{y}{x^2} + h(y) \\ \Rightarrow u_y &= -\frac{1}{x^2} + h'(y) = -\frac{1}{x^2} \\ \Rightarrow h(y) &= c_1 \end{aligned}$$

olup çözüm

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y}{x^2} = c$$

şeklinde bulunur.