4. GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

Bu kesimde belirli integral kavramını, aralığın sonsuz olduğu ve f nin $[a, b]$ üzerinde sonsuz süreksizliği (dolayısıyla sınırsız) olduğu durumlara genişleteceğiz. Her iki durumda da integrale genelleştirilmiş integral (has olmayan integral) adı verilir. Bu tür integraller uygulamada sıklıkla karşımıza çıkar Genelleştirilmiş integraller üç guruba ayrılır. Örneğin,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^1}, \int_0^2 \frac{dx}{x-1} \text{ ve } \int_1^\infty \frac{dx}{(x-2)^2}$$

integraleri genelleştirilmiş integralleredir, ancak herbiri farklı özelliklere sahiptir. Birinci integralde integral aralığı sonsuz, ikincisinde integrant sınırlı değil, üçüncüsünde ise bu durumların her ikisi mevcuttur.

4.1 Birinci (I.) Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller

Definition 1 *Sonsuz bir aralık üzerinde tanımlı sınırlı fonksiyonların integraline birinci tip genelleştirilmiş integral denir.*

1. *Eğer f fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında sürekli ise*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

2. *Eğer f fonksiyonu $(-\infty, b]$ aralığında sürekli ise*

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

3. *Eğer f fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında sürekli ise*

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

Herbir durumda limit sonlu ise genelleştirilmiş integral yakınsaktır ve limit değeri integralin değeridir. Eğer limit yoksa genelleştirilmiş integral ıraksaktır.

Example 2 $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x}$ *integralinin yakınsak yada ıraksak olduğu belirleyiniz.*

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} [\ln b - \ln 1] = \infty$$

olduğundan verilen integral ıraksaktır.

4.2 Birinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller için Yakınsaklık Testleri

Aşağıdaki testler integrasyon sınırlarının birinin ∞ olması halinde verilmiştir. Diğer durumlarda benzer testler verilebilir.

Theorem 3 (Karşılaştırma Testi) *$x \geq a$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda*

- *$\int_a^\infty g(x)dx$ yakınsak ise $\int_a^\infty f(x)dx$ de yakınsaktır.*
- *$\int_a^\infty f(x)dx$ ıraksak ise $\int_a^\infty g(x)dx$ de ıraksaktır.*

Example 4 *$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1}$ integrali için $0 \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^x}$ olup*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{e^x} = \lim_{b\to\infty} (1 - \frac{1}{e^b}) = 1$$

olduğundan karşılaştırma testine göre $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1}$ integrali yakınsaktır.

Theorem 5 (Limit Testi) *$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = \gamma$ olsun. O zaman $\int_a^\infty f(x)dx$ integrali*

- *$p > 1$ ve γ sonlu ise yakınsaktır.*
- *$p \leq 1$ ve $\gamma \neq 0$ ise ıraksaktır.*

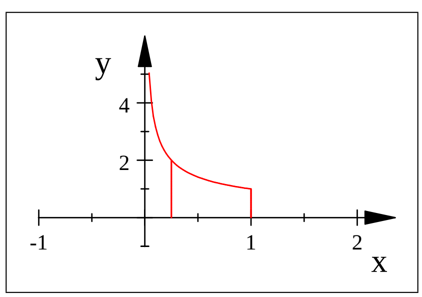
Example 6 *$\int_0^\infty \frac{x^2}{4x^4+25}dx$ integrali verilsin.*

$$\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \frac{x^2}{4x^4+25} = \frac{1}{4}$$

olup $p = 2$ ve $\gamma = \frac{1}{4}$ olduğundan $\int_0^\infty \frac{x^2}{4x^4+25}dx$ integrali yakınsaktır.

4.3 İkinci (II.) Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller

Birinci bölgede $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ eğrisi altnda $x = 0$ dan $x = 1$ e kadar olan bölgeyi düşünelim. Öncelikle a dan 1 e kadar olan kısmın alanını bulalım.



$$\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 - 2\sqrt{a}$$

olur. Sonra $a \to 0^+$ iken bu alanın limitini hesaplayalım.

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

olur. O halde eğri altında 0 dan 1 e kadar olan alan sonludur ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

Bu örnek te olduğu gibi, sonlu bir aralıkta pozitif olması gerekmeyen sınırsız bir f fonksiyonunun aralık üzerindeki integralini sınırlı olduğu aralık üzerindeki integrallerinin limiti olarak tanımlarız.

Definition 7 *Sonlu bir aralıkta bir noktada sınırsız olan fonksiyonun integraline II. tip genelleştirilmiş integral denir.*

1. *Eğer f fonksiyonu $(a, b]$ aralığında sürekli ve a da süreksizse*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx,$$

2. *Eğer f fonksiyonu $[a, b)$ aralığında sürekli ve b de süreksizse*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

3. *Eğer f fonksiyonu $a < c < b$ olmak üzere c noktası hariç $[a, b]$ aralığında sürekli ise*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Herbir durumda limit sonlu ise genelleştirilmiş integral yakınsaktır ve limit değeri integralin değeridir. Eğer limit yoksa genelleştirilmiş integral ıraksaktır.

Example 8 $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ *integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.*

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} [2\sqrt{3} - 2\sqrt{t-2}] = 2\sqrt{3}$$

olduğundan verilen integral yakınsaktır ve değeride $2\sqrt{3}$ *dür.*

Example 9 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ *integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.*

Bu integralde integrant $x = 0$ noktasında sınırsız gibi görünse de

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

olduğundan integral belirli integraldir. Belirli integraller her zaman yakınsak olduğundan verilen integral yakınsaktır.

4.4 İkinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller için .Yakınsaklık Testleri

Aşağıdaki testler f fonksiyonunu $[a, b]$ aralığında sadece $x = a$ noktasında sınırsız olduğu hal için verilmiştir. Diğer durumlar için benzer sonuçlar elde edilebilir.

Theorem 10 (Karşılaştırma Testi) *$a < x \leq b$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda*

- *$\int_a^b g(x)dx$ yakınsak ise $\int_a^b f(x)dx$ de yakınsaktır.*
- *$\int_a^b f(x)dx$ ıraksak ise $\int_a^b g(x)dx$ de ıraksaktır.*

Example 11 *$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ integrali verilsin. $x > 1$ için $0 \leq \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ olup*

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{t\to 1^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{t\to 1^+} (4 - 2\sqrt{t-1}) = 4$$

olduğundan karşılaştırma testine göre $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ integrali yakınsaktır.

Theorem 12 (Limit Testi) *$\lim_{x\to a^+}(x-a)^p f(x) = \gamma$ olsun. O zaman $\int_a^b f(x)dx$ integrali*

- *$p < 1$ ve γ sonlu ise yakınsaktır.*
- *$p \geq 1$ ve $\gamma \neq 0$ ise ıraksaktır.*

Example 13 *$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ integrali verilsin.*

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{2}$$

olup $p = \frac{1}{2}$ ve $\gamma = \frac{1}{2}$ olduğundan $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ integrali yakınsaktır.

4.5 Üçüncü Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller

Bir integral hem I. çeşit hem de II. çeşit genelleştirilmiş integral ise bu integrale üçüncü çeşit genelleştirilmiş integral denir. Örneğin,

$$\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x} dx$$

integralli üçüncü çeşit genelleştirilmiş integral olup bu integral uygun aralıklara bölünerek I. çeşit ve II. çeşit integrallerin toplamı olarak ifde edilebilir. Burada integrallerden en az biri ıraksak ise integral ıraksak ve tüm integraller yakınsak ise integral yakınsaktır.