12. BÖLGE DÖNÜŞÜMLERİ, İKİ KATLI İNTEGRALLER

Tanım 1. (u, v) noktaları bir D bölgesinin elemanları olmak üzere,

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases} \tag{1}$$

sistemi verildiğinde (u, v) koordinatlarından (x, y) koordinatlarına bir dönüşüm tanımlanmış olur. $uv-$ düzlemindeki (u, v) noktaları D bölgesini taradığında (x, y) noktaları da $xy-$ düzleminde bir Bbölgesini tarar. Bu durumda (1) dönüşümü D bölgesini B bölgesine dönüştürmüş olur. Bu nedenle (1) dönüşümüne bir **bölge dönüşümü** de denir. Bu dönüşümü T ile gösterirsek,

$$\begin{aligned} T \quad &: \quad D \to B \\ (u, v) \quad &\to \quad (x, y) = (f(u, v), g(u, v)) \end{aligned}$$

dönüşümü bir bölge dönüşümüdür. Eğer, f_u, f_v, g_u, g_v kısmi türevleri D bölgesinde sürekli ve bu bölgedeki her bir (u, v) için

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} . \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} . \frac{\partial y}{\partial u} \neq 0$$

ise (1) denklemleri u ve v değişkenlerine göre çözülebilir. Bu çözüm;

$$\begin{cases} u = F(x, y) \\ v = G(x, y) \end{cases} \tag{2}$$

ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} T^{-1} \quad &: \quad B \to D \\ (x, y) \quad &\to \quad (u, v) = (F(x, y), G(x, y)) \end{aligned}$$

ters dönüşümü elde edilir. Böylece (1) ve (2) denklem sistemleri yardımıyla B ve D bölgelerinin noktaları arasında bir bire-bir eşleme kurulmuş olur.

Tanım 2.

$$\begin{cases} x_1 = f_1\left(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n\right) \\ x_2 = f_2\left(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n\right) \\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdot \\ x_n = f_n\left(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n\right) \end{cases} \tag{3}$$

dönüşümü verildiğinde $i,\ k = 1, 2, \ldots, n$ için $\dfrac{\partial x_i}{\partial u_k}$ türevleri mevcut olmak üzere,

$$J = \frac{\partial\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{\partial\left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

determinantına (3) dönüşümünün **fonksiyonel determinantı** veya **Jakobiyeni** denir.

Örnek 1.

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \end{cases} \tag{4}$$

sisteminin ve tersinin Jakobiyenini bulunuz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} \\ &= u\left(\sin^2 v + \cos^2 v\right) \\ &= u \end{aligned}$$

olur. (4) eşitliğinden

$$\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + y^2} \\ v = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

bulunur. Bu ters dönüşümün Jakobiyeni,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \\
&= \begin{matrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{matrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{1}{u}
\end{aligned}
$$

olur.

Örnek 2.

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \sin\theta \cos\varphi \\
y &= \rho \sin\theta \sin\varphi \\
z &= \rho \cos\theta
\end{aligned}
$$

dönüşümü için

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}$$

Jakobiyenini hesaplayınız.

Çözüm.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} &= \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{matrix} \\
&= \begin{matrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{matrix}
\end{aligned}
$$

olur. Bu determinant açıldığında

$$J = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin\theta$$

bulunur.

İKİ KATLI İNTEGRALLER

xOy düzleminde bir B bölgesi ve bu bölge üzerinde tanımlı f fonksiyonu verilmiş olsun. f fonksiyonunun B üzerindeki integralini tanımlamak için bazı kavramlara ihtiyaç vardır. Şimdi bu kavramları vermeye çalışalım.

Tanım 3. B bölgesi xOy düzleminde kapalı ve sınırlı bir bölge olsun.

$$d(B) = maks\{|PQ| : P, Q \in B\}$$

sayısına B bölgesinin **çapı** denir.

Tanım 4. xOy düzleminde verilen bir B bölgesini B_1, $B_2, \ldots$, B_n gibi alt bölgelere ayıralım.

$$P = \{B_{1,}B_2, \ldots, B_n\}$$

kümesine B bölgesinin bir **parçalanması** denir.

$$\|P\| = maks\{d(B_1), d(B_2), \ldots, d(B_n)\}$$

sayısına P parçalanmasının **normu** veya **maksimal çapı** adı verilir. Burada, $d(B_k)$, B_k bölgesinin çapını göstermektedir.

Tanım 5. B kapalı ve sınırlı bir bölge ve f bu bölge üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. B bölgesinin bir $P = \{B_{1,}B_2, \ldots, B_n\}$ parçalanması verildiğinde ΔA_k, B_k bölgesinin alanını, (x_k, y_k) da B_k bölgesinin herhangi bir noktasını göstermek üzere

$$R(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$$

ifadesine f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen **Riemann toplamı** veya **integral toplamı** adı verilir.

Tanım 6. Eğer,

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k\right) \Delta A_k$$

limiti varsa, bu limite f fonksiyonunun B üzerindeki **iki katlı integrali** denir.

$$\iint_B f\left(x_k, y_k\right) dA$$

ile gösterilir. $f\left(x, y\right)$ ifadesine **integrant,** B bölgesine de **integrasyon bölgesi** adı verilir.