

MATEMATİKSEL BİYOLOJİ

Matematiksel Modelleme, Gazi Kitabevi 2014

Nuri ÖZALP

Nüfus Dinamiği ve Kararlılık



Nüfus Dinamiği ve Kararlılık

İçerik

- 1 Kararlılık Tanımı ve Teoremi
- 2 Tek Tür Modeli
- 3 İki Tür Modeli
- 4 Kararlılık
- 5 Faz Düzlemi-Orbit-Yörünge
- 6 Yarışma Modeli
- 7 Av Avcı Modeli
- 8 Karmaşa (Kaos)



Kararlılık

Definition

$\frac{dx}{dt} = f(x)$ diferensiyel denkleminin (sisteminin) bir **denge noktası** (sabit noktası, kritik noktası) $f(x_e) = 0$ denklemini sağlayan x_e noktasıdır. Eğer $\frac{dx}{dt} = f(x)$ denkleminin denge noktasına yakın tüm başlangıç koşulları için çözümü de denge noktasına yakın kalıyorsa, denge çözümü **kararlıdır** denir. Diğer bir deyişle, her $x(t_0) = x_0$ başlangıç noktalı $x(t)$ çözümü ve her $\varepsilon > 0$ için, eğer $|x_e - x_0| < \delta$ iken $|x(t) - x_e| < \varepsilon$ (her $t \geq t_0$) oluyorsa, x_e çözümü kararlıdır denir. ($t \rightarrow \infty$ için eşitsizlik sağlanıyorsa x_e çözümüne **asimptotik kararlıdır** denir.)

Theorem (Kararlılık)

Eğer f' türevi x_e yi içeren bir aralıkta sürekli ve $f'(x_e) < 0$ ise x_e denge noktası asimptotik kararlıdır. $f'(x_e) > 0$ ise x_e denge noktası kararsızdır.



Tek Tür Modeli – Malthusyan büyüme modeli

- Nüfus modellerinin öncüsü, Thomas Malthus (1798) tarafından önerilen ve **Malthusyan büyüme modeli** olarak adlandırılan ve daha sonraları **Charles Darwin**'de doğal ayıklanma prensibi fikrinin doğmasına neden olan üstel büyüme modelidir. Bu tür bir model yiyecek kaynaklarının veya diğer çevre faktörlerinin kısıtlılığı nedeniyle doğada açık olarak görünmemekle birlikte model geliştirme açısından bizim için bir başlangıç olacaktır.



Yalın bir doğum olayı, nüfusun tamamen denk organizmalardan oluştuğunu, ve ölümsüz olarak b oranında ürediğini kabul eder. Matematiksel olarak bu, yani

$$\frac{dP}{dt} = bP$$

demektir. Benzer şekilde, yalın bir ölüm olayı da hiç bir doğum olmaksızın, her bir bireyin aynı pozitif c ölüm oranına sahip olduğunu kabul eder. Bu ise,

$$\frac{dP}{dt} = -cP$$

anlamına gelir. Böylece sabit doğum ve ölüm oranlı bir nüfus modeli; $a = b - c$ (sabit) ve başlangıç nüfusu P_0 olmak üzere

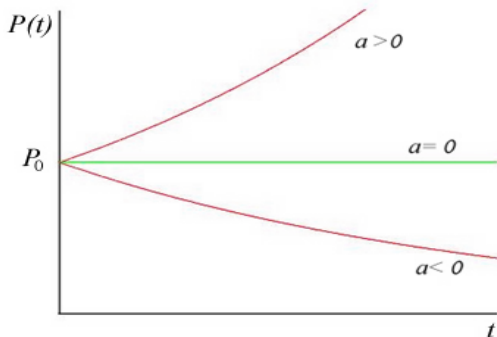
$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = aP \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$



(1)

Problemin çözümü

$$P(t) = P_0 e^{at} = \begin{cases} \rightarrow \infty, & (t \rightarrow \infty); \text{ eğer } a > 0 \text{ ise,} \\ = P_0 & ; \text{ eğer } a = 0 \text{ ise,} \\ \rightarrow 0, & (t \rightarrow \infty); \text{ eğer } a < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Şekil: Malthusyan büyüme modeli $P = P_0 e^{at}$ 

- $a > 0$ için üstel büyüme ve $a < 0$ için üstel küçülme (nüfus yokolması) vardır



- $a > 0$ için üstel büyüme ve $a < 0$ için üstel küçülme (nüfus yokolması) vardır
- Denge noktası $P_e = 0$ olup, $a < 0$ için **asimptotik kararlı**, $a > 0$ için ise **kararsız**



- $a > 0$ için üstel büyüme ve $a < 0$ için üstel küçülme (nüfus yokolması) vardır
- Denge noktası $P_e = 0$ olup, $a < 0$ için **asimptotik kararlı**, $a > 0$ için ise **kararsız**
- Nüfusun ikiye katlandığı t zamanı ($a > 0$) için $t = \ln 2/a$



- $a > 0$ için üstel büyüme ve $a < 0$ için üstel küçülme (nüfus yokolması) vardır
- Denge noktası $P_e = 0$ olup, $a < 0$ için **asimptotik kararlı**, $a > 0$ için ise **kararsız**
- Nüfusun ikiye katlandığı t zamanı ($a > 0$) için $t = \ln 2/a$
- Nüfusun yarılandığı t zamanı ($a < 0$) için $t = -\ln 2/a$



- $a > 0$ için üstel büyüme ve $a < 0$ için üstel küçülme (nüfus yokolması) vardır
- Denge noktası $P_e = 0$ olup, $a < 0$ için **asimptotik kararlı**, $a > 0$ için ise **kararsız**
- Nüfusun ikiye katlandığı t zamanı ($a > 0$) için $t = \ln 2/a$
- Nüfusun yarılandığı t zamanı ($a < 0$) için $t = -\ln 2/a$
- İkiye-katlama zamanı veya yarılanma-zamanı a ya bağlıdır



- $a > 0$ için üstel büyüme ve $a < 0$ için üstel küçülme (nüfus yokolması) vardır
- Denge noktası $P_e = 0$ olup, $a < 0$ için **asimptotik kararlı**, $a > 0$ için ise **kararsız**
- Nüfusun ikiye katlandığı t zamanı ($a > 0$) için $t = \ln 2/a$
- Nüfusun yarılandığı t zamanı ($a < 0$) için $t = -\ln 2/a$
- İkiye-katlama zamanı veya yarılanma-zamanı a ya bağlıdır
- Model, kısa zaman aralıklarında gerçekçi olabilir. Savaş, göç, doğum ve ölüm oranlarındaki değişimler gibi önemli faktörler burada göz ardı edilmiştir.



- $a > 0$ için üstel büyüme ve $a < 0$ için üstel küçülme (nüfus yokolması) vardır
- Denge noktası $P_e = 0$ olup, $a < 0$ için **asimptotik kararlı**, $a > 0$ için ise **kararsız**
- Nüfusun ikiye katlandığı t zamanı ($a > 0$) için $t = \ln 2/a$
- Nüfusun yarılandığı t zamanı ($a < 0$) için $t = -\ln 2/a$
- İkiye-katlama zamanı veya yarılanma-zamanı a ya bağlıdır
- Model, kısa zaman aralıklarında gerçekçi olabilir. Savaş, göç, doğum ve ölüm oranlarındaki değişimler gibi önemli faktörler burada göz ardı edilmiştir.
- Genel olarak, büyüme oranı a sabit olmayıp, zamana veya nüfus boyutuna bağlıdır.



Tek Tür Modeli – Gompertz (1779-1865) modeli

- Sigorta hesaplamaları için verilen bir model



Tek Tür Modeli – Gompertz (1779-1865) modeli

- Sigorta hesaplamaları için verilen bir model
- Günümüzde solid tümör (kanser hücresi) büyümesine uygulanmakta



Tek Tür Modeli – Gompertz (1779-1865) modeli

- Sigorta hesaplamaları için verilen bir model
- Günümüzde solid tümör (kanser hücresi) büyümesine uygulanmakta
- Büyüme oranı $a(t) = ke^{-rt}$ ($r > 0$)



Tek Tür Modeli – Gompertz (1779-1865) modeli

- Sigorta hesaplamaları için verilen bir model
- Günümüzde solid tümör (kanser hücresi) büyümesine uygulanmakta
- Büyüme oranı $a(t) = ke^{-rt}$ ($r > 0$)
- Tümör zamana göre üstel olarak büyümeyi göstermez. Tümör büyüklüğü arttıkça, toplam tümör hacminin ikiye katlanma zamanı sürekli olarak artar. Böylece, t anında bölünen hücrelerin hacmini $P(t)$ ile gösterirsek, bu durumda

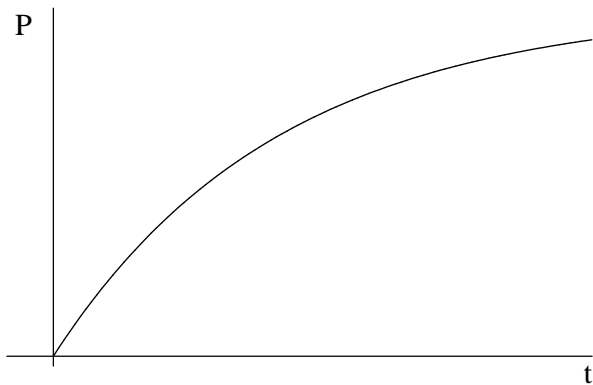
$$\frac{dP}{dt} = ke^{-rt}P, \quad P(0) = P_0$$

Problemin çözümü

$$P(t) = P_0 e^{k(1-e^{-rt})/r}$$

$t \rightarrow \infty$ için $a(t) \rightarrow 0$, $P(t) \rightarrow P_0 e^{k/r}$ ve ikiye-katlanma zamanı $\ln 2/a \rightarrow \infty$ olup, $P_e = 0$ denge noktası **kararsızdır**





Şekil: Tümör büyümesi modeli. $P(t) = P_0 e^{k(1-e^{-rt})}/r$



Nüfus yeterince büyürse, türün çevresi ve diğer türlerle olan ilişkileri de devreye girer. Yiyecek kıtlığı bu durumda nüfusun büyümesini engeller. Yiyecek kaynakları artırılrsa bile, yine de nüfus yoğunluğu arttıkça büyüme oranı azalır. Böylece, yoğunluk (kalabalıklık) yiyecek kaynaklarının kısıtlanması ile aynı etkiyi doğurur. Şimdi a büyüme oranının nüfus büyüklüğüne bağlı olduğunu düşünelim.

$$\frac{dP}{dt} = a(P)P$$

P yok olurken $a(P)$ çevre etkisi olmaksızın büyüme oranına yaklaşmaktadır. P artarken $a(P)$ azalır. Daha büyük nüfuslar için $a(P)$ negatiftir, yani doğumdan çok ölüm vardır. $a(P)$ nin sürekli olduğunu kabul edersek, bu durumda büyüme oranının sıfır olduğu bir nüfus varolmalıdır.



Tek Tür Modeli – Lojistik (Verhulst-Pearl) denklem

- Belçikalı matematikçi *Pierre F. Verhulst* 1838 yılında insan nüfusu için $a(P) = (r - sP)$ önerdi

$$\frac{dP}{dt} = (r - sP)P = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad (2)$$

$$K = r/s$$

